CONCOURS DE RECRUTEMENT

D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

ANNEE 2015

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Partie I

Question 1 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 1 : Il est connu que la relation de congruence est une relation d'équivalence et rien d'autre.

Question 2 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 2 : A est vrai. B n'est pas vrai pour tout c. Par exemple, $1\times 2 \equiv 3\times 2$ [4] mais $1 \not\equiv 3$ [4] (on peut effectivement simplifier par c quand c est premier à n).
C est vrai. Si $b-a = kn$, $k \in \mathbb{Z}$, et $n = k'm$, $k' \in \mathbb{Z}$, alors $b-a = kk'm$ avec $kk' \in \mathbb{Z}$.
D est évidemment faux en prenant par exemple $d = 1$ et a et b non congrus modulo n.

Question 3 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 3 : $5^2 = 25 \equiv -1[13]$ puis $5^4 \equiv 1$ [13]. B est vrai et A, C et D sont faux.

Question 4 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 4 : $5^{4k+r} = \left(5^4\right)^k \times 5^r$. Puisque $5^4 \equiv 1$ [13], $5^{4k+r} \equiv 5^r$ [13]. C est vrai et A, B et D sont faux.

Question 5 :

A) VRAI
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 5 : Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de n par 4 s'écrit $n = 4k + r$ où $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. D'après la question précédente, $5^n \equiv 5^r$ [13].

- Si $n \equiv 0$ [4], $5^n \equiv 5^0 \equiv 1$ [13].
- Si $n \equiv 1$ [4], $5^n \equiv 5^1 \equiv 5$ [13].
- Si $n \equiv 2$ [4], $5^n \equiv 5^2 \equiv -1 \equiv 12$ [13].
- Si $n \equiv 3$ [4], $5^n \equiv 5^3 \equiv -5 \equiv 8$ [13].

Donc, A et B sont vrais et C et D sont faux

Question 6 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 6 :

- Si $n \equiv 0$ [4], $A_n \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 4$ [13].
- Si $n \equiv 1$ [4], $A_n \equiv 1 + 5 + 5^2 + 5^3 \equiv 1 + 5 - 1 - 5 \equiv 0$ [13].
- Si $n \equiv 2$ [4], $A_n \equiv 1 + 5^2 + 5^4 + 5^6 \equiv 1 - 1 + 1 - 1 \equiv 0$ [13].
- Si $n \equiv 3$ [4], $A_n \equiv 1 + 5^3 + 5^6 + 5^9 \equiv 1 - 5 - 1 + 5 \equiv 0$ [13].

Donc, A_n est divisible par 13 si et seulement si n n'est pas un multiple de 4. B est vrai et A, C et D sont faux.

Partie II

Question 7 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 7 : Pour tout réel $t > 0$, $1 + t^2 > 0$ puis $\ln\left(1 + t^2\right) \neq 0$. Donc, la fonction $g\ :\ t \mapsto 1/\ln\left(1 + t^2\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$, on a bien $[x, 2x] \subset]0, +\infty[$ et la fonction $g\ :\ t \mapsto 1/\ln\left(1 + t^2\right)$ est donc continue sur $[x, 2x]$. A et C (ensembles mais pas séparément) permettent d'affirmer que f est définie sur $]0, +\infty[$. On parie sur le fait que A et C sont vrais. B et D sont sans rapport avec la définition de f.

Question 8 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 8 : Soit G une primitive de g sur $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$, $f(x) = G(2x) - G(x)$ et donc pour $x > 0$,

$$f'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\ln\left(1 + 4x^2\right)} - \frac{1}{\ln\left(1 + x^2\right)} = \frac{2\ln\left(1 + x^2\right) - \ln\left(1 + 4x^2\right)}{\ln\left(1 + 4x^2\right)\ln\left(1 + x^2\right)}.$$

Donc, A, C et D sont faux. D'autre part, B est vrai car

$$f'(x) = \frac{\ln\left(\left(1 + x^2\right)^2\right) - \ln\left(1 + 4x^2\right)}{\ln\left(1 + 4x^2\right)\ln\left(1 + x^2\right)} = \frac{\ln\left(x^4 + 2x^2 + 1\right) - \ln\left(1 + 4x^2\right)}{\ln\left(1 + 4x^2\right)\ln\left(1 + x^2\right)}.$$

Question 9 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 9 : Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(f'(x)) &= \operatorname{sgn}\left(\ln\left(x^4+2x^2+1\right) - \ln\left(1+4x^2\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(\left(x^4+2x^2+1\right) - \left(1+4x^2\right)\right) \\ &= \operatorname{sgn}\left(x^4-2x^2\right) = \operatorname{sgn}\left(x^2\left(x^2-2\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(x-\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

f' est strictement négative sur $\left]0,\sqrt{2}\right[$ est strictement positive sur $\left]\sqrt{2},+\infty\right[$. Donc f est strictement décroissante sur $\left]0,\sqrt{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\sqrt{2},+\infty\right[$. C est vrai et A, B et D sont faux.

Question 10 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 10 : Soit $x > 0$. Pour $t \in [x, 2x]$, $0 < \ln\left(1+t^2\right) \leqslant \ln\left(1+4x^2\right)$ et donc $g(t) \geqslant \dfrac{1}{\ln\left(1+4x^2\right)}$. Tout est faux.
En intégrant et puisque $x \leqslant 2x$, on obtient

$$f(x) = \int_x^{2x} g(t)\,dt \geqslant (2x-x)\frac{1}{\ln\left(1+4x^2\right)} = \frac{x}{\ln\left(1+4x^2\right)}.$$

$\dfrac{x}{\ln\left(1+4x^2\right)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln\left(4x^2\right)} = \dfrac{x}{2\ln x + 4} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{2\ln x} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ d'après un théorème de croissances comparées et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Question 11 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 11 : Soit $x > 0$. Pour $t \in [x, 2x]$, $0 < \ln\left(1+x^2\right) \leqslant \ln\left(1+t^2\right) \leqslant \ln\left(1+4x^2\right)$ et donc $\dfrac{1}{\ln\left(1+4x^2\right)} \leqslant g(t) \leqslant \dfrac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}$.
En intégrant, on obtient $\dfrac{x}{\ln\left(1+4x^2\right)} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{\ln\left(1+x^2\right)}$. C est vrai et A, B et D sont faux.

Question 12 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 12 : $\dfrac{2\ln x}{\ln\left(1+4x^2\right)} \leqslant \dfrac{f(x)}{x/(2\ln x)} \leqslant \dfrac{2\ln x}{\ln\left(1+x^2\right)}$ avec $\ln\left(1+4x^2\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln\left(4x^2\right) = 2\ln x + 4\ln\left(1+4x^2\right) 2\ln x$ et $\ln\left(1+x^2\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln\left(x^2\right) = 2\ln x$.
Donc, $\dfrac{2\ln x}{\ln\left(1+4x^2\right)}$ et $\dfrac{2\ln x}{\ln\left(1+x^2\right)}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$. D'après le théorème de gendarmes, $\dfrac{f(x)}{x/(2\ln x)}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$ ou encore $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{2\ln x}$. B est vrai et A, C et D sont faux.

Question 13 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 13 : $f(x) \underset{x\to+\infty}{+} \infty$ et $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\ln x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. Donc, $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Ox). C est vrai et A, B et D sont faux.

Partie III

Question 14 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 14 : Pour tout réel x, $f'_n(x) = 5x^4 + n > 0$ (car $n \in \mathbb{N}^*$). f_n est sontinue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = 1 + n - 1 = n > 0$. Donc, f_n s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$ en un certain réel $u_n \in]0, 1[$. A est vrai et B, C et D sont faux.

Question 15 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 15 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^5 + (n+1)u_n - 1 = u_n^5 + nu_n - 1 + u_n = u_n > 0 = f_{n+1}(u_{n+1}).$$

Puisque f_{n+1} est une fonction strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $u_n > u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc décroissante. B est var et A, C et D sont faux.

Question 16 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 16 : La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 et donc la suite (u_n) converge vers un réel positif ou nul.
$f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^5} + 1 - 1 = \dfrac{1}{n^5} > 0 = f_n(u_n)$ et donc $\dfrac{1}{n} > u_n$. A est vrai.
$f_n\left(\dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{1}{2^5n^5} + \dfrac{1}{2} - 1 = \dfrac{1}{32n^5} - \dfrac{1}{2} < 0$ et donc $\dfrac{1}{2n} < u_n$. B, C et D sont faux.

Question 17 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 17 : On sait déjà que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2n} < u_n < \dfrac{1}{n}$.
$f_n\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^5} + \dfrac{n}{n+1} - 1 = \dfrac{1}{(n+1)^5} - \dfrac{1}{n+1} < 0$. Donc, $\dfrac{1}{n+1} < u_n < \dfrac{1}{n}$ puis $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n-1}$. B et C sont vrais et A et D sont faux.

Question 18 :
A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 18 : $u_n^5 + nu_n - 1 = 0 \Rightarrow nu_n = 1 - u_n^5 \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{n^5} + o\left(\dfrac{1}{n^5}\right)$ puis

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

On en déduit que $\dfrac{1}{n} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n^6} + o\left(\dfrac{1}{n^6}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^6}$. A est vrai et B, C et D sont faux.

Partie IV

Question 19 :
A) VRAI
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 19 : Pour tout réel x, $1 + x^2 > 0$ et donc la fonction k est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. En particulier, la fonction k est définie, continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ et aussi sur $]-\infty, 0]$. A et B sont vrais et C et D sont faux.

Question 20 :
A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 20 : Pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

La fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. B est vrai et A, C et D sont faux.

Question 21 :
A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 21 : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Une équation de la tangente à C_k en son point d'abscisse 0 et $y = x$. C est vrai et A, B et D sont faux.

Question 22 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 22 : $f'(1) = 0$. Donc, A est vrai et B, C et D sont faux.

Question 23 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 23 : Pour $x > 0$,

$$f(x) = x\left[1 - \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}\right] = x\left[1 - \frac{\ln\left(x^2\right) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x}\right] = x\left[1 - \frac{2\ln x}{x} - \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x}\right].$$

$\dfrac{2\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ d'après un théorème de croissances comparées et $\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. Donc, $1 - \dfrac{2\ln x}{x} - \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 1$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. A est vrai et B, C et D sont faux.

Question 24 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 24 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la fonction k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}\left(u_{n+2} - u_{n+1}\right) = \operatorname{sgn}\left(k\left(u_{n+1}\right) - k\left(u_n\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(u_{n+1} - u_n\right).$$

Donc, la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. De plus, $u_1 = 1 - \ln(1+1^2) = 1 - \ln 2 < 1 = u_0$. Donc la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. C est vrai et A, B et D sont faux.

Question 25 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 25 : Pour $x \geqslant 0$, $k(x) \geqslant k(0) = 0$. Ensuite, $u_0 \geqslant 0$ puis par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Donc, la suite (u_n) converge vers un certain réel $\ell \in [0, +\infty[$. C est vrai et en particulier B est vrai. D'autre part, A et D sont faux.

Question 26 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 26 : k est continue sur $[0, +\infty[$ et en particulier en ℓ. Donc, quand n tend vers $+\infty$,

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} k(u_n) = k\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = k(\ell).$$

A est vrai. D'autre part, l'égalité $\ell = k(\ell)$ n'a aucun rapport avec le sens de variation de la fonction k et donc B, C et D sont faux.

Question 27 :

A) VRAI
B) FAUX
C FAUX
d) FAUX

Explication 27 : $k(x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right) = \dfrac{x^2}{2} - \ln\left(1 + x^2\right) = l(x)$. $l'(x) = x - \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{x^3 - x}{1+x^2} = \dfrac{x(x-1)(x+1)}{1+x^2}$. D'où le tableau de variation de la fonction k :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$l'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
l	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

l s'annule en un certain α de $]-\infty, -1[$ et un certain β de $]1, +\infty[$. l est négative sur $[\alpha, \beta]$, strictement positive sur $]-\infty, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$. Donc, pour tout réel x de $[\alpha, \beta]$, $k(x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2}$ et en particulier, pour tout réel x de $[0, 1]$, $k(x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2}$. Donc, A est vrai. Par contre, B, C et D sont faux.

Question 28 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 28 : La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 et $u_0 = 1$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} = k(u_n) \leqslant u_n - \dfrac{u_n^2}{2}$ puis $\dfrac{u_n^2}{2} \leqslant u_n - u_{n+1}$ et donc $u_n^2 \leqslant 2(u_n - u_{n+1})$. B est vrai. Puisque $\dfrac{1}{2}u_n^2 \leqslant u_n^2$, C est aussi vrai. Par contre, A et D sont faux car si $u_n > \beta(\geqslant 0,$, $k(u_n) > u_n - \dfrac{u_n^2}{2}$.

Question 29 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 29 : Pour $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}^2 \geqslant 0$. Donc, (S_n) est une suite croissante.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = 2(u_{n+1} - u_{n+2}) \geqslant 0$. Donc, (T_n) est une suite croissante.
Pour tout entier naturel k, $u_k^2 \leqslant 2(u_k - u_{k+1})$ d'après la question 28. En sommant ces inégalités, on obtient $S_n \leqslant T_n$. A et D sont vrais et B et C sont faux.

Question 30 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 30 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 2\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1}) = 2(u_0 - u_{n+1})$ (somme télescopique). Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 2 - 2u_{n+1}$ puis $\lim_{n\to+\infty} T_n = 2$. Donc, A, B et C sont faux.
Pour tout entier naturel n, $S_n \leqslant T_N = 2 - 2u_{n+1} \leqslant 2$. La suite (S_n) est croissante et majorée par 2. Donc, la suite (S_n) converge. D est vrai.

Partie V

Question 31 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 31 : Si il existe un entier p tel que $A^p + A^{p-1} + \ldots + A + I = 0$, alors $A\left(-A^{p-1} - \ldots - A - I\right) = I$ et donc la matrice A est inversible d'inverse $-A^{p-1} - \ldots - A - I$. A, B et D sont faux. Une matrice nilpotente A n'est pas inversible (car $(\det A)^k = \det\left(A^k\right) = 0$) et donc C est faux.

Question 32 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 32 : En développant suivant la deuxième ligne, on obtient $\det(A) = i((2i+1)(-i-2) - (2i+2)(-i-1)) = i(2-4i-i-2-2+2i+2i+2) = 1 \neq 0$. Donc, A est inversible.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} 1-2i & 1-i & -1+i \\ 0 & -i & 0 \\ 2-2i & 2-2i & i-2 \end{pmatrix}.$$

C est faux et D est vrai.

• $I + A = \begin{pmatrix} 2+2i & 1+i & -1-i \\ 0 & 1+i & 0 \\ 2+2i & 2+2i & -1-i \end{pmatrix}$.

• $A^2 = \begin{pmatrix} 1+2i & 1+i & -1-i \\ 0 & i & 0 \\ 2+2i & 2+2i & -2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2i & 1+i & -1-i \\ 0 & i & 0 \\ 2+2i & 2+2i & -2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ puis

$I + A + A^2 = \begin{pmatrix} 2+2i & 1+i & -1-i \\ 0 & 1+i & 0 \\ 2+2i & 2+2i & -1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2i & -1+i & 1-i \\ 0 & i & 0 \\ -2+2i & -2+2i & 2-i \end{pmatrix} = -A^{-1}$ puis $A^{-1} + I + A + A^2 = 0$ et donc $I + A + A^2 + A^3 = 0$ après multiplication des deux membres par A. Donc, la matrice A vérifie $\mathscr{P}(n)$.

Solution pour ceux qui sont en deuxième année. $\mathrm{rg}(A - iI) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1+i & 1+i & -1-i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2+2i & 2+2i & -2-2i \end{pmatrix} = 1$. Donc i est valeur propre de A d'ordre au moins 2. $\lambda + i + i = \mathrm{Tr}(A) = 2i - 1$ et donc $\mathrm{Sp}(A) = (i, i, -1)$.
La dimension de chaque sous-espace propre est l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante. Donc A est diagonalisable. $A = P\,\mathrm{diag}(i, i, -1)\,P^{-1}$ puis $A^4 = P\mathrm{diag}\left(i^4, i^4, (-1)^4\right)P^{-1} = I$ puis $A^4 - I = 0$ puis $(A-I)\left(A^3 + A^2 + A + I\right) = 0$. 1 n'est pas valeur propre de A. Donc $A - I \in GL_3(\mathbb{C})$ et après simplification, $I + A + A^2 + A^3 = 0$.

Question 33 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 33 : A est nilpotente. Donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

$$(A - \lambda I) \sum_{j=0}^{k-1} A^j (\lambda I)^{k-1-j} = A^k - (\lambda I)^k = -\lambda^k I$$

et donc $(A - \lambda I) \left(-\sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{-j-1} A^j \right) = I$. $A - \lambda I$ est inversible d'inverse $-\lambda^{-1} I - \lambda^{-2} A - \lambda^{-k} A^{k-1}$ où k est l'indice de nilpotence de A.
On parie sur le fait que B est vrai et A, C et D sont faux.

Question 34 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 34 : Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres complexes. On pose $M = \mathrm{Max}\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n||\}$ et on note i_0 un indice tel que $|\lambda_{i_0}| = M$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{i,j} = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ -\lambda_i a_{i,i} = \sum_{j \neq i} \lambda_j a_{i,j} \\
\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ |-\lambda_i a_{i,i}| = \left| \sum_{j \neq i} \lambda_j a_{i,j} \right| \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ |\lambda_i| |a_{i,i}| \leqslant \sum_{j \neq i} |\lambda_j| |a_{i,j}| \\
\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ |\lambda_i| |a_{i,i}| \leqslant \sum_{j \neq i} M |a_{i,j}| \Rightarrow |\lambda_{i_0}| |a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} M |a_{i_0,j}| \\
\Rightarrow |a_{i_0,i_0}| M \leqslant \left(\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}| \right) M
\end{aligned}$$

Si de plus on suppose que l'un au moins des λ_i n'est pas nul, alors $M > 0$ et après simplification, on obtient $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \left(\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}| \right)$.

Ainsi, si la famille des colonnes est liée ou encore si $\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0) / \sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$, alors $\exists i_0 \in [\![1, n]\!] / |a_{i_0,i_0}| \leqslant \left(\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}| \right)$. Par contraposition, si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$, alors la famille des colonnes de A est libre. On sait alors que A est inversible. Donc, B est vrai et A, C et D sont faux.

Question 35 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 35 : En développant suivant la dernière ligne, $\det(B) = 1 \times (-2 + 1) = -1 \neq 0$. Donc, B est inversible.

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = -i + j \\ e_2 = -i + 2j \\ e_3 = -3i + k \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} j = e_2 - e_1 \\ i = -2e_1 + e_2 \\ k = 3(-2e_1 + e_2) + e_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} j = e_2 - e_1 \\ i = -2e_1 + e_2 \\ k = -6e_1 + 3e_2 + e_3 \end{array} \right. \text{ et donc } B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 36 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 36 : En développant suivant la première colonne, $\det(C) = 1 \times (-20) + 1 \times (30) - (10) = 0$. Donc, C n'est pas inversible. A est vrai et B, C et D sont faux.

