CONCOURS DE RECRUTEMENT

D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

ANNEE 2016

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Partie I

Question 1 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 1 : $m = \dfrac{x+y}{2} \geqslant \dfrac{x+x}{2} = x$ et $m = \dfrac{x+y}{2} \leqslant \dfrac{y+y}{2} = y$. Donc, $x \leqslant m \leqslant y$. Donc, B et C sont vrais.

Notons que quand $x < y$, $m > x$ et donc A est faux et $m < y$ et donc D est faux.

Question 2 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 2 : $g = \sqrt{xy} \geqslant \sqrt{x^2} = x$ (car $x \geqslant 0$) et $g = \sqrt{xy} \leqslant \sqrt{y^2} = y$. Donc, $x \leqslant g \leqslant y$. Donc, A et D sont vrais et B et C sont faux.

Question 3 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) VRAI

Explication 3 : $\dfrac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ avec $0 < \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}$. Donc, $\dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{h} \leqslant \dfrac{1}{x}$ puis $x \leqslant h \leqslant y$. Donc, C et D sont vrais et A et B sont faux.

Question 4 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 4 : $m - g = \dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \dfrac{1}{2}\left(x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geqslant 0$. Donc, $m \geqslant g$. En appliquant à $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$, on obtient $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \geqslant \sqrt{\dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{y}} = \dfrac{1}{g} > 0$ et donc $h \leqslant g$.

En résumé, $0 < x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y$. Donc, C est vrai et A, B et D sont vrais.

Question 5 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 5 : D'après ce qui précède, B est vrai et A, C et D sont faux.

Partie II

Question 6 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 6 : 1, z, z^2, z^3 et z^4 sont les cinq racines 5-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. On sait que

$$z^5 = 1 \text{ et que } 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0.$$

Donc, $\alpha + \beta = -1$ et $\alpha\beta = z^3 + z^4 + z^6 + z^7 = z^3 + z^4 + z + z^2 = -1$. Donc, B et D sont vrais et A et C sont faux.

Question 7 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 7 : α et β sont les racines de $X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta = X^2 + X - 1$. A est vrai et B, C et D sont faux.

Question 8 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 8 : Donc, $\{\alpha, \beta\} = \left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$. $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}} = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) > 0$ et $\beta = e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{-\frac{4i\pi}{5}} = 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) < 0$. Donc, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} = \cos\left(\dfrac{8\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} = \cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)$.

Puisque $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) > 0$, $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}} = -\sin\left(\dfrac{8\pi}{5}\right)$.

Puisque $\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) > 0$, $\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}} = -\sin\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)$.

Tout est faux.

Partie III

Question 9 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 9 : $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. A est vrai et B est faux.

$I_1 = \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1$. C et D sont faux.

Question 10 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 10 : Soit $k \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^1 x^{k-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left[x^{k-1}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 (k-1)x^{k-2}\sqrt{1+x^2}\,dx \\ &= \sqrt{2}-(k-1)\int_0^1 \frac{x^{k-2}\left(1+x^2\right)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{2}-(k-1)\left(I_{k-2}+I_k\right), \end{aligned}$$

et donc $kI_k = \sqrt{2}-(k-1)I_{k-2}$. B est vrai et A, C et D sont faux.

Question 11 :

A) VRAI
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 11 : $2I_2 = \sqrt{2} - I_0 = \sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ puis $I_2 = \frac{\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}}\right)$. A est vrai et B est faux.

$3I_2 = \sqrt{2}-2I_1 = \sqrt{2}-2\left(\sqrt{2}-1\right) = 2-\sqrt{2}$ puis $I_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$. B est vrai et D est faux.

Partie IV

Question 12 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 12 : A ne peut être multipliée à droite que par une matrice ayant 3 lignes. Donc, A et C sont faux.

$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Donc B est vrai et D est faux.

Question 13 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 13 : En développant suivant la première ligne, on obtient $\det(A) = 3(3-4) - (-6+2) = -3+4 = 1$. B est vrai et A, C et D sont faux.

Question 14 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 14 : $\det(A) \neq 0$. Donc le système (S) est de Cramer. (S) admet un unique triplet solution. A et C sont faux. $\left\{\begin{array}{l} 3\times 1+5=8 \\ -2\times 1+5-2\times 2=-1 \\ 1-2\times 5+3\times 2=-3 \end{array}\right.$. Donc, l'unique solution est $(1,5,2)$. B est vrai et D est faux.

Question 15 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 15 : $\det(A) \neq 0$. Donc A est inversible. A est faux. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}{}^t(\mathrm{com}(A)) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$. D est vrai et B et C sont faux.

Partie V

Question 16 :

A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 16 : $1+\cos\theta+i\sin\theta = 2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)+2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$. Puisque $\theta \in]-\pi,\pi[$, on a $\dfrac{\theta}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ puis $2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) > 0$.

Donc $|z| = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$. On a aussi $|z| = \sqrt{(1+\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2} = \sqrt{2+2\cos\theta}$. Donc, A et C sont vrais et B et D sont faux.

Question 17 :
A) VRAI
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 17 : Puisque $z = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ avec $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, les arguments de z sont les $\frac{\theta}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. A est vrai et B est faux.
Puisque $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(\alpha)$ existe et $\tan(\alpha) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. C est vrai et D est faux.

Question 18 :
A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 18 : A est vrai et B et C sont faux. Puis

$$\begin{aligned} z = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} &= 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1 + i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

car $2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$. Donc, D est vrai.

Partie VI

Question 19 :
A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 19 : $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ et $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$. C est vrai et A, B et D sont faux

Question 20 :
A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 20 : $0 < \frac{1}{5} < 1$ puis $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ et donc $0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$. Ensuite

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \frac{2/5}{1 - (1/5)^2} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

puis

$$\tan(4\theta) = \frac{2\tan(2\theta)}{1-\tan^2(2\theta)} = \frac{10/12}{1-(5/12)^2} = \frac{120}{144-25} = \frac{120}{119}.$$

B est vrai et A, C et D sont faux.

Question 21 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 21 :

$$\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(4\theta) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan(4\theta)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

D est vrai et A, B et C sont faux.

Question 22 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 22 : A est faux car $\mathrm{Arctan}(\tan x)$ n'existe pas pour $x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. B et C sont vrais et D est faux.

Question 23 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 23 : $4\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5} - \frac{\pi}{4} = 4\theta - \frac{\pi}{4}$ avec $\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$. De plus, $0 < \theta < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < 4\theta < \pi$ avec $\tan(4\theta) > 0$ d'après la question 20. Donc, $0 < 4\theta < \frac{\pi}{2}$ puis $-\frac{\pi}{4} < 4\theta - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$ et en particulier $4\theta - \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

En résumé, $4\theta - \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$. Donc $4\theta - \frac{\pi}{4} = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239}$ puis $\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239}$. B est vrai et A, C et D sont faux.

Question 24 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 24 : $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ fournit $-\frac{\pi}{4} < \varphi - \frac{\pi}{4} < 0$ et $-\frac{\pi}{4} < 2\varphi - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$ puis

$$\tan\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\varphi - 1}{1+\tan\varphi} = \frac{(1/2)-1}{1+(1/2)} = -\frac{1}{3}$$

puis $\tan(2\varphi) = \frac{2(1/2)}{1-(1/2)^2} = \frac{4}{3}$ et donc

$$\tan\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{4}{3} - 1}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{1}{7}.$$

Ainsi, $\varphi - \frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\text{Arctan}\,\frac{1}{3}$ et donc $\text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$. A est vrai et B est faux.

Puis, $2\varphi - \frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\,\frac{1}{7}$ et donc $\frac{\pi}{4} = 2\,\text{Arctan}\,\frac{1}{2} - \text{Arctan}\,\frac{1}{7}$. D est vrai et C est faux.

Partie VII

Question 25 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 25 : L'atelier n° 1 a une cadence deux fois plus rapide que l'atelier n° 2 ou encore l'atelier n° 1 produit deux fois plus de pièces. Par suite, $1 = p(A_1) + p(A_2) = 3P(A_2)$ puis $p(A_2) = \frac{1}{3}$ et $p(A_1) = \frac{2}{3}$. A est vrai et B, C et D sont faux.

Question 26 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 26 : En notant D l'événement :« La pièce est défectueuse », la probabilité demandée est

$$p(A_1 \cap D) = p(A_1) \times p_{A_1}(D) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{100} = \frac{1}{50},$$

et de même,

$$p(A_2 \cap D) = p(A_2) \times p_{A_2}(D) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{100} = \frac{4}{300} = \frac{1}{75}.$$

D est vrai et A, B et C sont faux.

Question 27 :

A) FAUX
B) VRAI
C FAUX
d) FAUX

Explication 27 : D'après la formule des probabilités totales,

$$p(D) = p(A_1 \cap D) + p(A_2 \cap D) = \frac{1}{50} + \frac{1}{75} = \frac{3+2}{150} = \frac{1}{30}.$$

Donc, A est vrai et B est faux puis

$$p_4 = p_D(A_1) = \frac{p(A_1 \cap D)}{p(D)} = \frac{1/50}{1/30} = \frac{3}{5}$$

et donc C et D sont faux.

Partie VIII

Question 28 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 28 : $(X+1, Q_0) = \int_{-1}^{1} (t+1)\ dt = 2 \neq 0$. Donc, B est faux. $(X, Q_0) = \int_{-1}^{1} t\ dt = 0$ (fonction impaire). Donc, (Q_0, Q_1) est une famille orthogonale.

$\left(X^2 - \frac{1}{3}, Q_0\right) = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)\ dt = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0$ et $\left(X^2 - \frac{X}{2} - \frac{1}{3}, Q_0\right) = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{t}{2} - \frac{1}{3}\right)\ dt = \int_{-1}^{1} \left(-\frac{t}{2}\right)\ dt = 0$.

$\left(X^2 - \frac{1}{3}, X\right) = \int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{t}{3}\right)\ dt = 0$ et $\left(X^2 - \frac{X}{2} - \frac{1}{3}, X\right) = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{t}{2} - \frac{1}{3}\right) t\ dt = \int_{-1}^{1} \left(-\frac{t^2}{2}\right)\ dt \neq 0$.

Une famille orthogonale de E est $\left(1, X, X^2 - \frac{1}{3}\right)$. De plus, cette famille est libre (famille orthogonale de vecteurs tous non nuls) de cardinal $3 = \dim(E) < +\infty$.

$\left(1, X, X^2 - \frac{1}{3}\right)$ est une base orthogonale. Donc, B et C sont faux et on estime que A et D sont vrais (mais « ensembles »).

Question 29 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 29 : $\|Q_0\|^2 = \int_{-1}^{1} dt = 2$ puis $R_0 = \frac{1}{\|Q_0\|} Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\|Q_1\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}$ puis $R_1 = \frac{1}{\|Q_1\|} Q_1 = X\sqrt{\frac{3}{2}}$. A est faux et B est vrai.

$\|Q_2\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \int_{-1}^{1} \left(t^4 - \frac{2t^2}{3} + \frac{1}{9}\right)\ dt = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) = 2\frac{9-5}{45} = \frac{8}{45}$ puis $R_2 = \frac{1}{\|Q_2\|} Q_2 = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{4}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)$. C est vrai et D est faux.

Question 30 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 30 : $\left(X^2, X - \frac{5X^2}{4}\right) = \int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{5t^4}{4}\right) dt = \int_{-1}^{1} \left(-\frac{5t^4}{4}\right) dt \neq 0$. B est faux.

(X^2, X) est une famille orthogonale. Donc A est peut-être vrai.

$\left(X^2, X^2 - \frac{1}{3}\right) = \int_{-1}^{1} \left(t^4 - \frac{t^2}{2}\right) dt = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \neq 0$. Donc D est faux.

$\left(X^2, 1 - \frac{5}{3}X^2\right) = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{5t^4}{3}\right) dt = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0$ et $\left(X, 1 - \frac{5}{3}X^2\right) = 0$. Ainsi, $\left(X^2, X, 1 - \frac{5}{3}X^2\right)$ est une famille orthogonale puis une base orthogonale de E pour les mêmes rasions qu'à la question 28. On estime que A et D sont vrais.

Question 31 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 31 : $T_0 = \dfrac{1}{\|S_0\|}S_0$ avec $\|S_0\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^4\ dt = \dfrac{2}{5}$. Donc, $T_= \sqrt{\dfrac{5}{2}}X^2$. De même, $T_1 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}X$. B est vrai et A est faux.

$\|S_2\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{5}{3}t^2\right)^2\ dt = \int_{-1}^{1}\left(\frac{25}{9}t^4 - \frac{10}{3}t^2+1\right)dt = 2\left(\frac{5}{9}-\frac{10}{9}+1\right) = \frac{8}{9}$ puis $T_2 = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}\left(1-\dfrac{5}{3}X^2\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\left(1-\dfrac{5}{3}X^2\right)$. C est vrai et D est faux.

Partie IX

Question 32 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 32 : Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sin(4x)+\sin(3x) = \sin x &\Leftrightarrow \sin(4x) = -(\sin(3x)-\sin x) \Leftrightarrow 2\sin(2x)\cos(2x) = -2\sin x\cos(2x)\\
&\Leftrightarrow 2\cos(2x)(\sin(2x)+\sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \text{ ou } \sin(2x) = \sin(-x)\\
&\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\ 2x = \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ ou } \exists k\in\mathbb{Z}/\ 2x = -x+2k\pi \text{ ou } \exists k\in\mathbb{Z}/\ 2x = \pi+x+2k\pi\\
&\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \text{ ou } \exists k\in\mathbb{Z}/\ x = -\frac{2k\pi}{3} \text{ ou } \exists k\in\mathbb{Z}/\ x = \pi+2k\pi.
\end{aligned}$$

B et C sont faux. Puisque $\{\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\} = \{-\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, A est vrai et puisque $\{-\pi+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\} \subset \{\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, D est vrai.

Question 33 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) VRAI

Explication 33 : Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos(3x)+\sin(3x) = \sqrt{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(3x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(3x) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) = 1\\
&\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\ 3x-\frac{\pi}{4} = 2k\pi \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}.
\end{aligned}$$

A et C sont faux. B est vrai et, puisque $-\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{12}-\dfrac{2\pi}{3}$, D est vrai.

Question 34 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 34 : Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\sin z = 3 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 6i \Leftrightarrow \left(e^{iz}\right)^2 - 6ie^{iz} - 1 = 0 \text{ (car } e^{iz} \neq 0)\\
&\Leftrightarrow e^{iz} \in \left\{3i + 2i\sqrt{2}, 3i - 2i\sqrt{2}\right\} \ (\Delta' = (-3i)^2 + 1 = -8 = \left(2i\sqrt{2}\right)^2)\\
&\Leftrightarrow e^{iz} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right) e^{i\pi/2} \text{ ou } e^{iz} = \left(3 - 2\sqrt{2}\right) e^{i\pi/2} \text{ (avec } 3 - 2\sqrt{2} > 0)\\
&\Leftrightarrow e^{iz} = e^{\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)+i\pi/2} \text{ ou } e^{iz} = e^{\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)+i\pi/2}\\
&\Leftrightarrow e^{iz} = e^{\pm\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)+i\pi/2} \text{ (car } \left(3 + 2\sqrt{2}\right)\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 1)\\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ iz = \pm\ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right) + i\pi/2 + 2ik\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ z = \pm i\ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right) + \pi/2 + 2k\pi.
\end{aligned}$$

Donc, tout est faux (ou bien A, B et C sont vrais suivant le sens donné à la phrase « admet des solutions de la forme ... »).

Question 35 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 35 : Le déterminant du système (S) est

$$\begin{aligned}
\det(S) &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1\\ a+2 & a & 1\\ a+2 & 1 & a \end{vmatrix} \ (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3)\\
&= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \text{ (par linéarité par rapport à la première colonne)}\\
&= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} \ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - L_1)\\
&= (a+2)(a-1)^2.
\end{aligned}$$

Le système (S) a une solution unique si et seulement si $a \neq -2$ et $a \neq 1$. Donc, A et C sont faux.

Si $a = -2$, (S) s'écrit $\left\{\begin{array}{l} -2x + y + z = 1\\ x - 2y + z = -2\\ x + y - 2z = 4 \end{array}\right.$. En additionnant membre à membre les trois équations, on obtient $0 = 3$. Le système (S) n'a pas de solution. B est faux.

Si $a = 1$, $(S) \Leftrightarrow x + y + z = 1$. Donc, (S) admet une infinité de solutions à savoir l'ensemble des triplets de la forme $(x, y, 1 - x - y)$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D est vrai.

Question 36 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 36 : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $\left\{\begin{array}{l} x+y=\dfrac{\pi}{3} \\ \sin x+\sin y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{\pi}{3}-x \\ \sin x+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)=\dfrac{1}{2}\ (E) \end{array}\right.$.

$$
\begin{aligned}
(E) & \Leftrightarrow \sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \\
& \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} /\ x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} /\ x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \\
& \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} /\ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} /\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,
\end{aligned}
$$

puis $(S) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ y=\dfrac{\pi}{2}-2k\pi \end{array}\right.$ ou $\exists k \in \mathbb{Z} / \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ y=-\dfrac{\pi}{6}-2k\pi \end{array}\right.$.

$$
\mathscr{S}=\left\{\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{2}-2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup\left\{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,-\frac{\pi}{6}-2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}\right\}.
$$

C est vrai et A, B et D sont faux.

