CONCOURS DE RECRUTEMENT
D'ELEVES PILOTE DE LIGNE
ANNEE 2019
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Partie I

Question 1 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 1 : Le polynôme $P = X$ est dans $\mathbb{Z}[X]$ et admet le rationnel 0 pour racine. Donc, A) est faux. Le polynôme $P = X^2 - 2$ est dans $\mathbb{Z}[X]$ et admet pour racines les nombres irrationnels $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Donc, B) est faux.

Pour C) et D), c'est très ambigü : on devrait imposer $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$ et $p \neq 0$ (si $p = 0$, p ne peut pas diviser quoi que soit). Avec ces hypothèses, le résultat de C) est connu pour être vrai (et D) est faux) :

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{p}{q}\right) = 0 &\Rightarrow a_n\frac{p^n}{q^n} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0 \\
&\Rightarrow a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0 \text{ (en multipliant les deux membres par } q^n\text{)} \\
&\Rightarrow a_np^n = q\left(-a_{n-1}p^{n-1} - \ldots - a_1pq^{n-2} - a_0q^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, q divise a_np^n et $q \wedge p^n = 1$. D'après le théorème de Gauss, q divise a_n. De même, p divise a_0 (en écrivant $a_0q^n = p\left(-a_np^{n-1} - \ldots - a_1q^{n-1}\right)$). On parie sur le fait que C) est vrai et D) est faux.

Question 2 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 2 : La réponse A) est donc vraie d'après la question 1 : les éventuelles racines rationnelles de P sont à choisir parmi les $\frac{p_i}{q_j}$ où p_i est un diviseur entier relatif de a_0 et q_j est un diviseur entier relatif de a_n (si on met le signe de $r = \frac{p}{q}$ dans p uniquement, on peut se contenter des diviseurs q entiers naturels (non nuls) de a_n). Par suite, la réponse C) est fausse (?).
La réponse B) est fausse car en prenant p et q entiers naturels, on oublie d'éventuelles racines rationnelles strictement négatives.
Enfin D) est fausse car d'éventuelles racines non réelles ne surgiront pas de l'étude des variations de la fonction P.

Question 3 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 3 : Il faut comprendre les propositions avec l'hypothèse supplémentaire : « en cherchant d'éventuelles racines rationnelles avec la méthode des questions 1 et 2 » (sinon, le nombre de rationnels pouvant être racines de Q est bien sûr au plus 3, Q étant de degré 3).

Si $r = \dfrac{p}{q}$, $p \wedge q = 1$, est racine de Q, p divise 4 et q divise 6 puis $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ et $q \in \{1, 2, 3, 6\}$ puis

$$r \in \left\{\pm\frac{1}{1}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{6}, \pm\frac{4}{1}, \pm\frac{4}{2}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{4}{6}\right\}$$

ou encore

$$r \in \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm 4, \pm\frac{4}{3}\right\}.$$

r peut donc prendre encore 16 valeurs rationnelles deux à deux distinctes. Parmi ces rationnels, 10 sont non entiers. On parie sur le fait que D) est vrai et le reste est faux.

Question 4 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 4 : $14 = 2 \times 7$ et $78 = 2 \times 3 \times 13$. Les éventuelles racines rationnelles positives de R sont les nombres de la forme $\dfrac{2^a 7^b}{2^c 3^d 13^e}$, $(a, b, c, d, e) \in \{0, 1\}^5$. Parmi ces $2^5 = 32$ nombres rationnels, certains sont égaux entre eux : le nombre $\dfrac{2^1 7^b}{2^1 3^d 13^e}$ est égal au nombre $\dfrac{2^0 7^b}{2^0 3^d 13^e}$. En supprimant les doublons, on obtient les rationnels de la forme $\dfrac{2^a 7^b}{2^c 3^d 13^e}$, $(a, b, c, d, e) \in \{0, 1\}^5$ et $(a, c) \neq (1, 1)$. Il y a $2 \times 2 \times 2 = 8$ nombres deux à deux distincts de la forme $\dfrac{2^0 7^b}{2^0 3^d 13^e}$, 8 nombres deux à deux distincts de la forme $\dfrac{2^1 7^b}{2^0 3^d 13^e}$ et 8 nombres deux à deux distincts de la forme $\dfrac{2^0 7^b}{2^1 3^d 13^e}$ Au total, il y a 24 nombres rationnels positifs deux à deux distincts, pouvant être racines de R.
Il y a 4 entiers positifs qui sont des racines possibles de R à savoir 1, 2, 7 et 14. Il ne reste donc que $24 - 4 = 20$ rationnels positifs non entiers deux à deux distincts pouvant encore être racines de R. C) est vrai et le reste est faux.

Question 5 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 5 : Si $r = \dfrac{p}{q}$, $(p, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{R}^*$, $p \wedge q = 1$, est racine de S, alors p divise 1 et q divise 1 puis $p = \pm 1$ et $q = 1$ et donc $r = 1$ ou $r = -1$. Mais $S(1) = -1 \neq 0$ et $S(-1) = 3 \neq 0$. Donc, S n'admet pas de racine rationnelle. B) est vrai et le reste est faux.

Question 6 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 6 : $\lim\limits_{x \to -\infty} S(x) = -\infty < 0$, $S(-1) = 3 > 0$, $S(1) = -1 < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = +\infty$. S étant continue sur $\mathbb{R}$, S s'annule une fois dans $]-\infty, -1[$, une fois dans $]-1, 1[$ et une fois dans $]1, +\infty[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. S admet donc 3 racines réelles deux à deux distinctes. S étant de degré 3, on a trouvé toutes les racines de S. B) est vrai et le reste est faux.

Partie II

Question 7 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 7 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{a}{d}u_n + \dfrac{b}{d}$. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. La suite n'est géométrique que si $b = 0$, n'est arithmétique que si $a = d$ et n'est constante que si $a = 0$. B) est vrai et A), C) et D) sont faux.

Question 8 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 8 : Puisque $(c, d) \neq (0, 0)$, $ad - bc = 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ (a, b) = \lambda(c, d)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a alors $u_{n+1} = \dfrac{\lambda\,(cu_n + d)}{cu_n + d} = \lambda$. Donc, la suite (u_n) est constante à partir du rang 1 et en particulier, convergente de limité λ. Donc, A) est faux.
Si $u_0 \neq \lambda$, la suite (u_n) n'est pas constante. C) est faux. Puisque $\lambda = \dfrac{a}{c}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{a}{c}$. D) est vrai. Enfin, si par exemple u_0, a, b, c et d sont des réels strictement positifs tel que $ad - bc = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie. Donc, B) est faux.

Question 9 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 9 : La condition $u_0 \neq -\dfrac{d}{c}$ est absolument nécessaire car sinon u_1 n'existe pas. Donc, A), C) et D) sont faux. Mais cette condition n'est pas suffisante. Si par exemple, $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ ($c = 1 \neq 0$ et $ad - bc = 1 \times -1 \times 1 = -1 \neq 0$), alors $u_1 = 0$ puis u_2 n'existe pas. Donc, C) est faux également.

Question 10 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 10 : L'équation $f(x) = x$ s'écrit $\dfrac{ax + b}{cx + d} = x$ ou encore $cx^2 + (d - a)x - b = 0$ et $cx + d \neq 0$. Puisque $c \neq 0$, l'équation $cx^2 + (d - a)x - b = 0$ est du second degré et admet 0, 1 ou 2 racines réelles. f admet donc 0, 1 ou 2 points fixes. Donc, C) et D) sont faux. Mais f peut admettre au plus deux points fixes. On parie sur le fait que A) est vrai et B) est faux.

Question 11 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 11 : Les égalités $c\alpha^2 + (d-a)\alpha - b = 0$ et $c\beta^2 + (d-a)\beta - b = 0$ s'écrivent encore $b = c\alpha^2 + (d-a)\alpha$ et $b = c\beta^2 + (d-a)\beta$. A) est vrai et le reste est faux.

Question 12 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 12 : Par définition, $f(\alpha) = \alpha$. Donc, si $u_0 = \alpha$, alors $u_1 = f(u_0) = \alpha$ puis par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et en particulier convergente. De même, si $u_0 = \beta$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. C) est vrai et le reste est faux.

Question 13 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 13 : Le premier terme de la suite $\left(\dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$. A), C) et D) sont faux. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} &= \frac{\dfrac{au_n + b}{cu_n + d} - \alpha}{\dfrac{au_n + b}{cu_n + d} - \beta} = \frac{(a - \alpha c)u_n + b - \alpha d}{(a - \beta c)u_n + b - \beta d} = \frac{(a - \alpha c)u_n + c\alpha^2 - a\alpha}{(a - \beta c)u_n + c\beta^2 - a\beta} \\ &= \frac{a - \alpha c}{a - \beta c} \times \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}.\end{aligned}$$

La suite $\left(\dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, de premier terme $\dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$ et de raison $k = \dfrac{a - \alpha c}{a - \beta c}$. B) est vrai.

Question 14 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 14 : Pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} = k^n U$ en posant $U = \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \alpha = k^n U (u_n - \beta)$ puis $(1 - k^n U) u_n = \alpha - \beta k^n U$ et finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{\alpha - \beta k^n \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}}{1 - k^n \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}}.$$

Si $|k|<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$. Donc, A) et B) sont faux. Si $|k|>1$ et $\beta\neq 0$, la suite $\left(\dfrac{u_n-\beta}{u_n-\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{k}\in]-1,1[$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\beta$.

Si $k=-1$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}=(-1)^n$ et la suite $\left(\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}\right)$ n'a pas de limite, ni réelle, ni infinie. Donc la suite (u_n) ne peut converger ni vers α, ni vers β, ni vers ℓ différent de α et de β. La suite (u_n) diverge.

$k=1$ fournit $a-\beta c=a-\alpha c$ puis $c(\alpha-\beta)=0$. Ceci est impossible car $c\neq 0$ et $\alpha\neq\beta$. Donc, D) est vrai et le reste est faux.

Question 15 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 15 : α est racine double de l'équation $cx^2+(d-a)x-b=0$ et donc $\alpha=\dfrac{a-d}{2c}$ ou encore $d-a=-2c\alpha$.

Pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{u_{n+1}-\alpha}&=\frac{1}{\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}-\alpha}=\frac{cu_n+d}{(a-c\alpha)u_n+b-d\alpha}=\frac{cu_n+d}{(a-c\alpha)u_n+c\alpha^2-a\alpha}\\&=\frac{1}{a-c\alpha}\frac{cu_n+d}{u_n-\alpha}\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{1}{u_{n+1}-\alpha}-\frac{1}{u_n-\alpha}&=\frac{1}{a-c\alpha}\frac{cu_n+d}{u_n-\alpha}-\frac{1}{u_n-\alpha}\\&=\frac{cu_n+d-a+c\alpha}{(a-c\alpha)(u_n-\alpha)}=\frac{cu_n-2c\alpha+c\alpha}{(a-c\alpha)(u_n-\alpha)}=\frac{c\,(u_n-\alpha)}{(a-c\alpha)(u_n-\alpha)}\\&=\frac{c}{a-c\alpha}.\end{aligned}$$

La suite $\left(\dfrac{1}{u_n-\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de premier terme $\dfrac{1}{u_0-\alpha}$ et de raison $k'=\dfrac{c}{a-\alpha c}$. A) est vrai et le reste est faux.

Question 16 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 16 : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_n-\alpha}=\dfrac{1}{u_0-\alpha}+n\dfrac{c}{a-\alpha c}$ puis

$$u_n=\alpha+\frac{1}{\dfrac{1}{u_0-\alpha}+n\dfrac{c}{a-\alpha c}}.$$

Puisque $c\neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$. C) est vrai et le reste est faux.

Question 17 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 17 : Si la suite (u_n) converge vers un certain réel $\ell \neq -\dfrac{d}{c}$, f étant continue en ℓ, ℓ doit être un point fixe de f. f n'a pas de point fixe et donc (u_n) ne peut pas converger vers ℓ.
Si (u_n) converge vers $-\dfrac{d}{c}$, $au_n + b$ tend vers $a\left(-\dfrac{d}{c}\right) + b = -\dfrac{ad - bc}{c} \neq 0$ puis $|u_{n+1}| = \dfrac{|au_n + b|}{|cu_n + d|}$ tend vers $+\infty$ ce qui est impossible. Donc, (u_n) ne tend pas vers $-\dfrac{d}{c}$. En résumé, (u_n) n'a pas de limite réelle. D) est vrai et A) et C) sont faux.
Soit $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$. $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = -1$ et donc f n'a pas de point fixe. La suite : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\dfrac{1}{u_n}$, est la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'a pas de limite, ni réelle, ni infinie. Donc, B) est faux.

Partie III

Question 18 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 18 : $M(a,b,c) = a\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = aA + bB + cC$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, tout est faux.
On note que $A + B + C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Question 19 :

A) VRAI
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 19 : $E = \text{Vect}(A, B, C)$ est un espace de dimension inférieure ou égal à 3. De plus,

$$aA + bB + cC = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} b - c + a & a - b & a - c \\ c - a & a & a - c \\ b - a & a - b & a \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a = 0 = a - b = a - c \Rightarrow a = b = c = 0.$$

Donc, (A, B, C) est une base de E puis E est effectivement de dimension 3. A) est vrai. Une autre base est $(2A, 2B, 2C)$ et donc B) est vrai. C) et D) sont nécessairement faux. Vérifions-le explicitement. Dans C) et D), $P + Q + R = 0$. Donc, la famille(P, Q, R) proposée est liée et n'est donc pas une base de E.

Question 20 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 20 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$AC = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C.$$

La table de multiplication des éléments de la base est :

$\times$	A	B	C
A	A	0	0
B	0	B	0
C	0	0	C

C) est vrai et le reste est faux.

Question 21 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 21 : $M(a,b,c)\times M(a',b',c') = (aA+bB+cC)(a'A+b'B+c'C) = aa'A+bb'B+cc'C = M(aa',bb',cc')$.
D) est vrai et le reste est faux.

Question 22 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 22 : $M(a,b,c) - M(a',b',c') = (a-a')A + (b-b')B + (c-c')C = M(a-a', b-b', c-c') \in E$ et $M(a,b,c) \times M(a',b',c') = M(aa', bb', cc') = M(a',b',c') \times M(a,b,c)$. Donc, A) est vrai et B), C) et D) sont faux.

Partie IV

Question 23 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 23 : Le nombre de tirages simultanés de deux boules parmi 15 est $\binom{15}{2} = \dfrac{15 \times 14}{2} = 105$.

Le nombre de tirages simultanés de deux boules parmi les n boules noires est $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$, le nombre de tirages simultanés de deux boules parmi les b boules blanches est $\binom{b}{2} = \dfrac{b(b-1)}{2}$ et le nombre de tirages simultanés de deux boules parmi les r boules rouges est $\binom{r}{2} = \dfrac{r(r-1)}{2}$.

Le nombre de tirages simultanés de deux boules parmi 15 où les deux boules ont la même couleur est $\dfrac{1}{2}(n(n-1) + b(b-1) + r(r-1))$. Donc,

$$g(n,b,r) = \frac{(n(n-1) + b(b-1) + r(r-1))/2}{105} = \frac{1}{210}(n(n-1) + b(b-1) + r(r-1)).$$

Tout est faux.

Question 24 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 24 : Le plan (NBR) a bien sûr pour équation $x+y+z=15$ car les trois points non alignés N, B et R appartiennent au plan d'équation $x+y+z=15$. B) est vrai et le reste est faux.

Question 25 :

A) FAUX
B) VRAI
C) VRAI
D) FAUX

Explication 25 : $n+b+r=15$ et donc $M \in (NBR)$. A) est faux et C) est vrai. Ensuite,

$$g(n,b,r) = \frac{1}{210}\left(n^2+b^2+r^2-n-b-r\right) = \frac{1}{210}\left(OM^2 - 15\right).$$

B) est vrai et D) est faux.

Question 26 :
A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 26 : Soit $H(5,5,5)$. H est un point de (NBR) et $\overrightarrow{OH}$ est un vecteur normal au plan (NBR). Donc, H est le projeté orthogonal de O sur le plan (NBR). La valeur minimale de $g(n,b,r) = \dfrac{1}{210}\left(OM^2 - 15\right)$ est donc

$$\frac{1}{210}\left(OH^2 - 15\right) = g(5,5,5).$$

Tout est faux.

Question 27 :
A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
d) FAUX

Explication 27 : $g(5,5,5) = \dfrac{1}{210}\left(3\times 5^2 - 15\right) = \dfrac{1}{70}\left(5^2 - 5\right) = \dfrac{2}{7}$. A) est vrai et le reste est faux.

Question 28 :
A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 28 : La probabilité d'obtenir deux boules de même couleur est donc $p = \dfrac{2}{7}$. L'espérance de X est

$$E(X) = (-x)(1-p) + (kx - x)\times p = -\frac{5}{7}x + \frac{2}{7}(kx - x) = \frac{(2k-7)x}{7}.$$

Le jeu est équitable si et seulement si $E(X) = 0$ ce qui équivaut à $k = \dfrac{7}{2}$. D) est vrai et le reste est faux.

Partie V

Question 29 :
A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 29 : Pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f_n'(x) = n\left[n(-\sin x)(\cos x)^{n-1}\sin x + (\cos x)^n \cos x\right] = n(\cos x)^{n-1}\left(-n\sin^2 x + \cos^2 x\right)$.
Pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $f_n'(x) = n(\cos x)^{n+1}\left(1 - n\tan^2 x\right)$ est du signe de $1 - n\tan^2 x$. Or, pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$1 - n\tan^2 x = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ (car } \tan x \geqslant 0)$$
$$\Leftrightarrow x = \text{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ (car } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[).$$

De plus, la fonction $x \mapsto 1 - n\tan^2 x$ étant strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, en posant $x_n = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, f_n' est strictement positive sur $[0, x_n[$ et strictement négative sur $\left]x_n, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

f_n est donc strictement croissante sur $[0, x_n]$ et strictement décroissante sur $\left[x_n, \dfrac{\pi}{2}\right]$. f_n admet un maximum sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ en un point unique x_n vérifiant : $x_n = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. A) est vrai et le reste est faux.

Question 30 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 30 : $x_n = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. C) est vrai et le reste est faux.

Question 31 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 31 : $f_n(x_n) = n\left(\cos\left(\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \sin\left(\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Déjà, puisque $\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, $n \sin\left(\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} n \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} n \times \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

D'autre part, $\left(\cos\left(\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = e^{n\ln\left(\cos\left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}$ puis

$$
\begin{aligned}
n\ln\left(\cos\left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) &\underset{n \to +\infty}{=} n\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \underset{n \to +\infty}{=} n\ln\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\underset{n \to +\infty}{=} n\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{=} -\frac{1}{2} + o(1)
\end{aligned}
$$

puis

$$
\left(\cos\left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \underset{n \to +\infty}{=} e^{-\frac{1}{2} + o(1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-\frac{1}{2}}.
$$

Finalement,

$$
y_n \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{n} = \sqrt{\frac{n}{e}}.
$$

B) est vrai et le reste est faux.

Question 32 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 32 : Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ puis, pour $x \in \mathbb{R}$, posons $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\, dt$.

$$
g(x) = \left(1 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right).
$$

Par intégration et en tenant compte de $G(0) = 0$, on obtient $G(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)$ puis

$$\begin{aligned} f(x) = G\left(x^2\right) - G(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x^2 + o\left(x^4\right)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} -x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right). \end{aligned}$$

D) est vrai et le reste est faux.

Partie VI

Question 33 :

A) FAUX
B) FAUX
C) VRAI
D) FAUX

Explication 33 : Le fait que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 n'impose pas A) ou B) ou D). Donc, A), B) et D) sont faux.

On sait que $\left(x_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \text{ et } y_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0\right) \Leftrightarrow z_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow |z_n| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. C) est vrai.

On note que, puisque $[0,1] \subset \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n \cos t\ dt \leqslant \int_0^1 t^n\ dt = \dfrac{1}{n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant y_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et donc $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

On note aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^{n+1} \cos t\ dt \leqslant \int_0^1 t^n \cos t\ dt$ ou encore $x_{n+1} \leqslant x_n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De même, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Question 34 :

A) FAUX
B) VRAI
C) FAUX
D) FAUX

Explication 34 : Une intégration par parties fournit :

$$x_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} \cos t\ dt = \left[t^{n+1} \sin t\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n \sin t\ dt = \sin(1) - (n+1)y_n.$$

B) est vrai et le reste est faux.

Question 35 :

A) FAUX
B) FAUX
C) FAUX
D) VRAI

Explication 35 : De même,

$$y_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} \sin t \, dt = \left[t^{n+1}(-\cos t)\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n(-\cos t) \, dt = -\cos(1) + (n+1)x_n.$$

D) est vrai et le reste est faux.

Question 36 :

A) VRAI
B) FAUX
C) FAUX
D) FAUX

Explication 36 : y_n tend vers 0 et $(n+1)x_n = \cos(1) + y_{n+1}$. Donc, $(n+1)x_n$ tend vers $\cos(1)$ puis nx_n tend vers $\cos(1)$ car $(n+1)x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} nx_n$.
x_n tend vers 0 et $(n+1)y_n = \sin(1) - x_{n+1}$. Donc, ny_n tend vers $\sin(1)$. A) est vrai et le reste est faux.

