# CONCOURS DE RECRUTEMENT

# D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

## ANNEE 2020

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES

---

## Partie I

**Question 1 :**

**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** VRAI
**D)** FAUX

**Explication 1 :** L'équation caractéristique associée à la relation de l'énoncé est $(E_c)\ :\ z^2 - \alpha z - \alpha = 0$. Son discriminant est $\Delta = \alpha^2 + 4\alpha = \alpha(\alpha+4)$. Si $\alpha \in ]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$, $\Delta > 0$. Dans ce cas, l'équation $(E_c)$ admet deux solutions réelles distinctes $r$ et $s$ avec $r < s$. De plus, puisque $\alpha \neq 0$, $0^2 - \alpha \times 0 - \alpha = -\alpha \neq 0$ et donc $0$ n'est pas solution de $(E_c)$ ou encore $r$ et $s$ sont non nuls. On sait alors que les deux suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de $(E_\alpha)$.
B) et C) sont vraies. Donc, A) et D) sont nécessairement faux. En effet, pour $\alpha = -2$ par exemple, les solutions de $(E_c)$ sont $r = -1 + i \notin \mathbb{R}$ et $s = -1 - i \notin \mathbb{R}$.

**Question 2 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 2 :** Les réels non nuls $r$ et $s$ tels que $r < s$ existent si et seulement si $\alpha \in ]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$. Dans ce cas, $\{r, s\} = \left\{\dfrac{\alpha \pm \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}\right\}$. Plus précisément, puisque $\dfrac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2} < \dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}$, on a $r = \dfrac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}$ et $s = \dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}$. A) et B) sont faux.
Ensuite, $rs = -\alpha$ et $r + s = \alpha$. Donc, si $\alpha < -4$, $r$ et $s$ sont de même signe puis $r$ et $s$ sont strictement négatifs. Dans ce cas, $r < s < 0$ puis $|r| > |s|$. Donc, C) est faux. Si $\alpha > 0$, $r$ et $s$ sont de signes contraires et donc $r < 0 < s$. Dans ce cas, $|s| - |r| = s + r = \alpha > 0$ et donc $|s| > |r|$. D) est faux.

**Question 3 :**

**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** VRAI

**Explication 3 :** Soit $\alpha' = -\alpha$. L'équation $z^2 + \alpha z + \alpha = 0$ s'écrit encore $z^2 - \alpha' z - \alpha' = 0$ avec $\alpha' \in ]0, 4[$. Cette équation admet deux solutions réelles distinctes $r$ et $s$. Les éléments de $E_{-\alpha} = E_{\alpha'}$ sont les suites de la forme $a\,(r^n)_{n\in\mathbb{N}} + b\,(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. B) et D) sont vrais et A) et C) sont faux.

**Question 4 :**

**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** FAUX

 

**Explication 4 :** Si $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, $E_\alpha$ est constitué des suites de la forme $a\left(r^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + b\left(s^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ où $r = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}$ et $s = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}$. On a vu que dans ce cas $|r| < |s| = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}$. Or

$$\alpha(\alpha+4) = \alpha^2 + 4\alpha = (\alpha+2)^2 - 4 \in \left]0, \frac{9}{4}\right[$$

puis

$$0 < \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2} < \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = 1.$$

Donc, $|r| < 1$ et $|s| < 1$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} s^n = 0$. Mais alors, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (ar^n + bs^n) = 0$. Tout élément de $E_\alpha$ converge vers 0. B) est vrai et le reste est faux.

**Question 5 :**

**A)** VRAI
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 5 :** Dans le cas où $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, $E_\alpha$ est constitué des suites de la forme $a\left(r^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + b\left(s^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ où $r = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2} < \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2} = s$. On suppose être dans ce cas.

On doit avoir $\left\{\begin{array}{l} a + b = u_0 \\ ar + bs = u_1 \end{array}\right.$ et donc $as - ar = su_0 - u_1$ et $-br + bs = -ru_0 + u_1$ puis $a = \frac{su_0 - u_1}{s - r}$ et $b = \frac{-ru_0 + u_1}{s - r}$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{su_0 - u_1}{s - r} r^n + \frac{-ru_0 + u_1}{s - r} s^n.$$

A) est vrai et le reste est faux.

**Question 6 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** FAUX

**Explication 6 :** Si $u_1 - u_0 r \neq 0$, puisque $s > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_1 - ru_0}{s - r} s^n \neq 0$. Puisque $|r| < |s|$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_1 - ru_0}{s - r} s^n$. La suite $\left(\frac{u_1 - ru_0}{s - r} s^n\right)$ ne s'annule pas et est de signe constant (le signe de $u_1 - ru_0$). Donc, à partir d'un certain rang, la suite $(u_n)$ ne s'annule pas et est de signe constant.

Puisque $\frac{u_1 - ru_0}{s - r} s^n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$, $\ln|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left|\frac{u_1 - ru_0}{s - r} s^n\right| = \ln\left|\frac{u_1 - ru_0}{s - r}\right| + n\ln|s| \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln|s|$ (car $0 < s < 1$) et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln|u_n|}{n} = \ln|s|.$$

C) est vrai et le reste est faux.

 

**Question 7 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 7 :** Si $u_1 - u_0 r = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{su_0 - u_1}{s - r} r^n$. Si $su_0 - u_1 \neq 0$, puisque $r < 0$, la suite $(u_n)$ change de signe à chaque rang, ne s'annule pas et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln|u_n|}{n} = \ln|r|$ mais si de plus $su_0 - u_1 = 0$, alors $(u_n)$ est la suite nulle et la suite $(\ln|u_n|)$ n'est pas définie. On parie sur le fait que tout est faux.

On note néanmoins que si $su_0 - u_1 = 0$ et $u_1 - u_0 r \neq 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{-ru_0 + u_1}{s - r} s^n$ et la suite $(u_n)$ ne s'annule pas et est de signe constant.

**Question 8 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** FAUX

**Explication 8 :** Si $\alpha > \dfrac{1}{2}$, alors $s > 1$ puis $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} s^n = +\infty$. Si $-ru_0 + u_1 \neq 0$, $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{-ru_0 + u_1}{s - r} s^n$ et donc $(u_n)$ n'est pas bornée. Pour que $(u_n)$ soit bornée, il est nécessaire que $-ru_0 + u_1 = 0$. A) et B) sont faux.

Supposons maintenant que $-ru_0 + u_1 = 0$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mu r^n$ où $\mu = \dfrac{su_0 - u_1}{s - r}$. Donc, D) est faux. Il reste à étudier le caractère borné de la suite $(r^n)$. On sait déjà que $r < 0$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\mathrm{sgn}(r - (-1)) &= \mathrm{sgn}\left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2} + 1\right) = \mathrm{sgn}\left(\alpha + 2 - \sqrt{\alpha(\alpha+4)}\right) \\
&= \mathrm{sgn}\left((\alpha+2)^2 - \alpha(\alpha+4)\right) \text{ (car } \alpha + 2 > 0 \text{ et } \sqrt{\alpha(\alpha+4)} > 0\text{)} \\
&= \mathrm{sgn}(4).
\end{aligned}$$

Donc, $r + 1 > 0$ puis $-1 < r < 0$. On sait alors que la suite $(u_n)$ est bornée et il en est de même de toute suite du type $(\mu r^n)$, $\mu \in \mathbb{R}$. C) est vrai.

# Partie II

**Question 9 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** VRAI

**Explication 9 :** Arccos($\alpha$) n'existe pas si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Donc, A), B) et C) sont faux. D'après le cours, D) est vrai.

**Question 10 :**

**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** FAUX

 

**Explication 10 :** D'après le cours, pour tout $\alpha \in [0, \pi]$, $\text{Arccos}(\cos(\alpha)) = \alpha$. Mais cette égalité est fausse pour les autres valeurs de $\alpha$. Par exemple, $\text{Arccos}(\cos(2\pi)) = \text{Arccos}(1) = 0 \neq 2\pi$. B) est vrai et le reste est faux.

**Question 11 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** FAUX

**Explication 11 :** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $t_n(x)$ existe si et seulement si $\text{Arccos}(x)$ existe ce qui équivaut à $x \in [-1, 1]$. C) est vrai et le reste est faux.

**Question 12 :**

**A)** VRAI
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 12 :** Pour $x \in [-1, 1]$, $t_0(x) = \cos(0) = 1$ et $t_1(x) = \cos(\text{Arccos}(x)) = x$. A) est vrai et B) est faux.
Ensuite, $t_2(x) = \cos(2\,\text{Arccos}(x)) = 2\cos^2(\text{Arccos}(x)) - 1 = 2x^2 - 1$. Donc, C) est faux. $t_3(x) = \cos(3\,\text{Arccos}(x)) = 4\cos^3(\text{Arccos}(x)) - 3\cos(\text{Arccos}(x)) = 4x^3 - 3x$. Donc, D) est faux.

**Question 13 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** VRAI

**Explication 13 :** Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. $0 < \dfrac{\pi}{2n} \leqslant \theta_k \leqslant \dfrac{(2n-1)\pi}{2n} < \pi$ et donc $\text{Arccos}(\cos(\theta_k)) = \theta_k$ puis

$$t_n(\cos(\theta_k)) = \cos\left(n \times \frac{2k+1}{2n}\pi\right) = \cos\left(n\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0.$$

Donc, D) est vrai. Soit maintenant $k \in \mathbb{Z}$. La division euclidienne de $k$ par $2n$ s'écrit $k = q(2n) + r$ où $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ et $0 \leqslant r \leqslant 2n - 1$. Pour un tel $k$, $\theta_k = \dfrac{2(2qn + r) + 1}{2n}\pi = \dfrac{2r + 1}{2n}\pi + 2q\pi$ puis $t_n(\cos(\theta_k)) = t_n(\cos(\theta_r))$ où cette fois-ci $r \in [\![0, 2n-1]\!]$. Ceci ramène au cas où $k \in [\![0, 2n-1]\!]$. Le cas où $k \in [\![0, n-1]\!]$ a été étudié précédemment et on suppose dorénavant $k \in [\![n, 2n-1]\!]$. Dans ce cas, $\theta_k \in [\pi, 2\pi]$ puis $2\pi - \theta_k \in [0, \pi]$. Par suite,

$$t_n(\cos(\theta_k)) = t_n(\cos(2\pi - \theta_k)) = t_n(n(2\pi - \theta_k)) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0.$$

Donc, C) est vrai. A) et B) sont faux (par exemple, $\text{Arccos}\left(\dfrac{2n-1}{2n}\pi\right)$ n'a pas de sens pour $n \geqslant 1$).

**Question 14 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** FAUX

**Explication 14 :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\frac{2k+1}{2n}\pi} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{p\pi}{2n}} \times \left(e^{i\frac{p\pi}{n}}\right)^k$. Ensuite, $0 < p < n$ puis $0 < \dfrac{p\pi}{n} < \pi$ et en particulier, $e^{i\frac{p\pi}{n}} \neq 1$. On en déduit que

 

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{p\pi}{2n}} \times \left(e^{i\frac{p\pi}{n}}\right)^k = e^{i\frac{p\pi}{2n}} \times \frac{1-\left(e^{i\frac{p\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{p\pi}{n}}} = \left(1-e^{ip\pi}\right)\frac{e^{i\frac{p\pi}{2n}}}{e^{i\frac{p\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{p\pi}{2n}}-e^{i\frac{p\pi}{2n}}\right)}$$
$$= \left(1-(-1)^p\right)\frac{1}{-2i\sin\left(\dfrac{p\pi}{2n}\right)} = \frac{\left(1-(-1)^p\right)i}{2}\frac{1}{\sin\left(\dfrac{p\pi}{2n}\right)}.$$

Si $p$ est pair, cette expression est nulle. Donc, C) est vrai et B) est faux. Si $p$ est impair,

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k} = \frac{(1+1)\,i}{2}\frac{1}{\sin\left(\dfrac{p\pi}{2n}\right)} = \frac{i}{\sin\left(\dfrac{p\pi}{2n}\right)}.$$

Donc, A) et D) sont faux.

**Question 15 :**

**A)** VRAI
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** FAUX

**Explication 15 :** Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(p \operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\theta_k\right)\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(p\theta_k\right)$$
$$= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\left((-1)^p-1\right)}{2i}\frac{1}{\sin\left(\dfrac{p\pi}{2n}\right)}\right) = 0.$$

Donc, A) et C) sont vrais

**Question 16 :**

**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 16 :** Soit $n \geqslant 1$. Pour $x \in [-1, 1]$,

$$t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = \cos\left((n+1)\operatorname{Arccos}(x)\right) + \cos\left((n-1)\operatorname{Arccos}(x)\right) = 2\cos(\operatorname{Arccos}(x))\cos(n\operatorname{Arccos}(x))$$
$$= 2xt_n(x).$$

B) est vrai et le reste est faux.

**Question 17 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** VRAI

 

**Explication 17 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $T_n$ est uniquement défini car connu en une infinité de valeurs de la variable, l'intervalle $[-1, 1]$ étant infini. $T_0 = 1$ est de degré $0$ et $T_1 = X$ est de degré $1$. De plus, si pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n$ est de degré $n$ et $T_{n+1}$ est de degré $n+1$, alors $\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_{n+1} - T_n) = \deg(2XT_{n+1}) = n+2$. On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.

$T_0 = 1$ est de coefficient dominant $1$. Ensuite, $T_1 = X$ est de coefficient dominant $1$ et pour $n \geqslant 1$, $\mathrm{dom}(T_{n+1}) = \mathrm{dom}(2XT_n - T_{n-1}) = \mathrm{dom}(2XT_n) = 2\mathrm{dom}(T_n)$. Donc, pour $n \geqslant 1$, $\mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}$. D) est vrai et le reste est faux.

**Question 18 :**
**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 18 :** Soit $n \geqslant 1$. Les $n$ nombres $x_k = \cos(\theta_k)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, sont racines du polynôme $T_n$. De plus, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $0 \leqslant \dfrac{\pi}{2n} \leqslant \theta_k \leqslant \dfrac{(2n-1)\pi}{2n} \leqslant \pi$. Ainsi, les nombres $\theta_k$ sont $n$ nombres deux à deux distincts de l'intervalle $[0, \pi]$. La fonction cos étant injective sur $[0, \pi]$ (car strictement décroissante), les nombres $x_k$ sont $n$ racines deux à deux distinctes du polynôme $T_n$ qui est de degré $n$. On en déduit que ce sont toutes les racines du polynôme $T_n$ puis que $T_n$ admet exactement $n$ racines deux à deux distinctes, toutes réelles, simples et dans $[-1, 1]$.

D'autre part, $T_0$ n'a pas de racine. On parie néanmoins sur le fait que B) est vrai et le reste est faux.

# Partie III

**Question 19 :**
**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** VRAI
**D)** FAUX

**Explication 19 :** D'après le cours, on sait que B) et C) sont vrais et A) et D) sont faux (si $\dim(E) = 0$, A) et D) sont vrais et si $p = 0$ ou $p = \mathrm{Id}_E$, ...).

**Question 20 :**
**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** VRAI

**Explication 20 :** Une intersection de sous-espaces est un sous-espace et n'est donc pas vide. A) est faux. On sait que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires ($E = \mathrm{im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$). D) est vrai. En général, une réunion de sous-espaces n'est pas un sous-espace et donc B) est faux. $\mathrm{Ker}(p)$ n'est pas le complémentaire de $\mathrm{Im}(p)$ et C) est faux.

**Question 21 :**
**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** FAUX

**Explication 21 :** $q^2 = (\mathrm{Id}_E - p)^2 = \mathrm{Id}_E - 2p + p^2 = \mathrm{Id}_E - 2p + p = \mathrm{Id}_E - p = q$. Donc, B) et D) sont faux. Ensuite, $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p) = \{u \in E / \ p(u) = u\} = \mathrm{Im}(p)$. Mais alors, en appliquant au projecteur $q$, $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - q) = \mathrm{Ker}(p)$. C) est vrais et A) est faux.

 

**Question 22 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 22 :** $p_1$ et $q_1$ sont des applications de $E$ dans $E$ et donc tout est faux (on le parie). Plus précisément, pour tout $u$ de $G$, $p_1(u) = 0$ et pour tout $u$ de $F$, $q_1(u) = 0$. Donc, avec l'ambiguïté de l'énoncé, ou bien tout est juste, ou bien tout est faux et on parie sur le fait que tout est faux.

**Question 23 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** VRAI

**Explication 23 :** $F = \{(x, x, x),\ x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 1, 1),\ x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\,(v_1)$ où $v_1 = (1, 1, 1)$. Donc, $F$ est une droite vectorielle et en particulier un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
$G = \left\{(x, -2x, z),\ (x, z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{x(1, -2, 0) + z(0, 0, 1),\ (x, z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \text{text}\,(v_2, v_3)$ où $v_2 = (1, -2, 0)$ et $v_3 = (0, 0, 1)$. Donc, $G$ est un plan vectoriel ($v_2$ et $v_3$ ne sont pas colinéaires) et en particulier un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. A) et B) sont faux et C) est vrai.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$u - \lambda v_1 \in G \Leftrightarrow (x - \lambda, y - \lambda, z - \lambda) \in G \Leftrightarrow 2(x - \lambda) + (y - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2x + y}{3}.$$

Ainsi, pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, il existe un et un seul vecteur $v$ de $F$ tel que $u - v \in G$, à savoir $v = \frac{2x + y}{3}(1, 1, 1)$. Ceci montre que $F$ et $G$ sont supplémentaires. D) est vrai.

**Question 24 :**

**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 24 :** D'après la question précédente, $p(i) = \frac{2}{3}(1, 1, 1)$, $p(j) = \frac{1}{3}(1, 1, 1)$ et $p(k) = (0, 0, 0)$. Donc, $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. B) est vrai et le reste est faux.

**Question 25 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** VRAI

**Explication 25 :** $N = I_3 - M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. D) est vrai et le reste est faux.

 

**Question 26 :**

**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 26 :** $A^2 = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 30 & 60 & 90 \\ 20 & 40 & 60 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A$. Donc, $f$ est une projection. D) est faux.

$G'$ est le noyau de $f$ ou encore l'ensemble des triplets $(x, y, z)$ tels que $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc, $G' = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + 2y + 3z = 0\right\}$. Donc, A) est faux.
$G'$ est un plan vectoriel et donc $F' = \mathrm{Im}(f)$ est une droite vectorielle. $F'$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $f(i) = \frac{1}{10}(3, 2, 1)$ ou encore $F' = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ 2x = 3y = 6z\right\}$. B) est vrai et C) est faux.

# Partie IV

**Question 27 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**d)** FAUX

**Explication 27 :** Soit $n \geqslant 2$. $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5\left(n^2 + 2\right)$. Si ce nombre est un carré parfait, alors $n^2 + 2$ est nécessairement divisible par 5. Or,

- si $n \equiv 0$ [5], $n^2 + 2 \equiv 2$ [5] et donc $n^2 + 2$ n'est pas divisible par 5,
- si $n \equiv \pm 1$ [5], $n^2 + 2 \equiv 3$ [5] et donc $n^2 + 2$ n'est pas divisible par 5,
- si $n \equiv \pm 2$ [5], $n^2 + 2 \equiv 1$ [5] et donc $n^2 + 2$ n'est pas divisible par 5.

Ainsi, $n^2 + 5$ n'est jamais divisible par 5 et donc $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$ n'est jamais un carré parfait. Donc, C) est vrai et le reste est faux.

**Question 28 :**

**A)** VRAI
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** VRAI

**Explication 28 :** Modulo 8, un entier est congru à l'un des entiers $0$, $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$ et $4$. Donc, modulo 8, le carré d'un entier est congru à l'un des entiers $0$, $1$, et $4$.
Par suite, modulo 8, si $N$ est un entier somme de trois carrés d'entiers, alors :
$N \equiv 0+0+0 = 0$ ou $N \equiv 0+0+1 = 1$ ou $N \equiv 0+0+4 = 4$ ou $N \equiv 0+1+1 = 2$ ou $N \equiv 0+1+4 = 5$ ou $N \equiv 0+4+4 \equiv 0$ ou $N \equiv 1+1+1 = 3$ ou $N \equiv 1+1+4 = 6$ ou $N \equiv 1+4+4 \equiv 1$ ou $N \equiv 4+4+4 \equiv 4$.
On constate que $N$ n'est jamais congru à 7 modulo 8 et donc $p$ ne peut être la somme de trois carrés parfaits. A) et D) sont vrais et B) et C) sont faux.

**Question 29 :**

**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** FAUX

 

**Explication 29 :** Modulo 3, $p$ est congru à l'un des entiers $-1$, $0$ ou $1$. Si $p \equiv \pm 1$ [3], alors $8p^2 + 1 \equiv 0$ [3]. Puisque $8p^2+1$ est premier, ceci impose $8p^2+1 = 3$ ce qui est impossible. Donc, $p \equiv 0$ [3] puis $p = 3$ car $p$ est premier. Mais alors, $8p^2+1 = 73$ et $8p^2-1 = 71$ sont premiers. Donc, B) est vrai. D'autre part, $8p^2-3 = 69 = 3 \times 23$, $8p^2+3 = 75 = 3 \times 25$ et $8p^2+5 = 77 = 7 \times 11$ ne sont pas premiers. Donc, A), C) et D) sont faux.

**Question 30 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** VRAI

**Explication 30 :** Supposons $x$ et $y$ non premiers entre eux. Soit $p$ un nombre premier diviseur commun à $x$ et $y$. Alors $p$ divise $x^2+y^2 = z^2$ puis $p$ divise $z$ car $p$ est premier. Ceci contredit $\text{PGCD}(x, y, z) = 1$. Donc, $x$ et $y$ sont premiers entre eux. De même, $x$ et $z$ sont premiers entre eux et $y$ et $z$ sont premiers entre eux. Finalement, $x$, $y$ et $z$ sont deux à deux premiers entre eux. D) est vrai et le reste est faux.

**Question 31 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** VRAI

**Explication 31 :** Puisque $x$, $y$ et $z$ sont deux à deux premiers entre eux, au plus un des trois entiers $x$, $y$ ou $z$ est pair. A) et C) sont faux.
Si $x$ et $y$ sont impairs, alors $x \equiv 1$ [2] et $y \equiv 1$ [2] puis $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 0$ [2]. Donc, $z^2$ est pair puis $z$ est pair ($z$ impair $\Rightarrow z \equiv 1$ [2] $\Rightarrow z^2 \equiv 1$ [2] $\Rightarrow z^2$ impair). La démarche est analogue pour les deux autres cas : si $x$ et $z$ sont impairs, alors $y$ est pair et si $y$ et $z$ sont impairs alors $x$ est pair. D) est vrai et le reste est faux.

**Question 32 :**

**A)** VRAI
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** VRAI

**Explication 32 :** Supposons $z$ pair. Alors, $x$ et $y$ sont impairs. Par suite, $x = 2k+1$ puis $x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 \equiv 1$ [4] et de même $y^2 \equiv 1$ [4] puis $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2$ [4]. Mais ceci est impossible car $z = 2k$ fournit $z^2 = 4k^2 \equiv 0[4]$. Donc, $z$ est impair puis l'un des deux entiers $x$ ou $y$ est pair et l'autre impair. A) et D) sont vrais et B) et C) sont faux.

# Partie V

**Question 33 :**

**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** FAUX

**Explication 33 :** $f_1(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Donc, A), B) et D) sont faux. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $f_n(x) = \dfrac{1+(n-1)x}{1+nx}$.

- C'est vrai pour $n = 1$ (et même pour $n = 0$).

 

- Soit $n \geqslant 1$. Si $f_n(x) = \dfrac{1+(n-1)x}{1+nx}$, alors

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2 - \dfrac{1+(n-1)x}{1+nx}} = \frac{1+nx}{2(1+nx)-(1+(n-1)x)} = \frac{1+(n+1-1)x}{1+(n+1)x}.$$

Le résultat est démontré par récurrence. C) est vrai.

**Question 34 :**
**A)** VRAI
**B)** FAUX
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 34 :** Un développement limité à l'ordre 5 en 0 finit par $o\left(x^5\right)$ ou $x^5 o(1)$ ou $x^5\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$. On parie sur le fait qu'il s'agit d'une erreur d'énoncé.

$$\begin{aligned} f_n(x) &\underset{x\to 0}{=} (1+(n-1)x)\left(1 - nx + n^2x^2 - n^3x^3 + n^4x^4 - n^5x^5 + o\left(x^5\right)\right) \\ &= 1 - x + nx^2 - n^2x^3 + n^3x^4 - n^4x^5 + o\left(x^5\right) \end{aligned}$$

A) est vrai et le reste est faux.

# Partie VI

**Question 35 :**
**A)** FAUX
**B)** FAUX
**C)** VRAI
**D)** FAUX

**Explication 35 :** L'univers est $\Omega = \{(F,G),(F,F),(G,G),(G,F)\}$ (en notant en premier l'ainé(e)). Chacun des quatre événements élémentaires a une probabilité égale à $\dfrac{1}{4}$. Si on note $A$ l'événement : « l'ainée est une fille » et $B$ l'événement « les deux enfants sont des filles », la probabilité demandée est $p = P_A(B)$. Donc,

$$p = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}.$$

C) est vrai et le reste est faux.

**Question 36 :**
**A)** FAUX
**B)** VRAI
**C)** FAUX
**D)** FAUX

**Explication 36 :** Si on note $A$ l'événement : « Il y a au moins un garçon » et $D$ l'événement « les deux enfants sont des garçons », la probabilité demandée est $p = P_C(D)$. Donc,

$$p = \frac{P(C\cap D)}{P(C)} = \frac{P(D)}{P(C)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

B) est vrai et le reste est faux.

 