Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2015

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

L'objet du problème est l'étude du nombre de records d'une permutation via la suite de variables aléatoires $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ introduite dans la partie II. La partie III utilise les notations et des résultats de la partie II.

Partie I Une distance entre lois de variables aléatoires

Toutes les variables aléatoires de cette partie sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$.

1. Soit X, Y et Z trois variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Justifier la convergence de la série de terme général $\Big|\mathbf{P}([X=n]) - \mathbf{P}([Y=n])\Big|$.

On note $d(X,Y) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\Big|\mathbf{P}([X=n]) - \mathbf{P}([Y=n])\Big|\Big)$.

b) Que dire des variables X et Y quand $d(X,Y)=0$?
Donner un exemple simple de deux variables X et Y distinctes et telles que $d(X,Y)=0$.

c) Prouver l'inégalité : $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$.

2. **a)** On pose $A = \Big\{k \in \mathbb{N} ; \mathbf{P}([X=k]) \geq \mathbf{P}([Y=k])\Big\}$. Vérifier l'égalité :

$$d(X,Y) = \Big|\mathbf{P}([X \in A]) - \mathbf{P}([Y \in A])\Big|.$$

b) Soit B une partie de $\mathbb{N}$.
Prouver l'inégalité : $\Big|\mathbf{P}([X \in B]) - \mathbf{P}([Y \in B])\Big| \leq d(X,Y)$.
On pourra faire intervenir les parties $B \cap A$ et $B \cap A^c$.

3. Soit $p \in [0,1]$, X une variable suivant la loi de Bernoulli de paramètre p et Y une variable suivant la loi de Poisson de paramètre p.

a) Justifier, pour tout réel x, l'inégalité : $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$.

b) Établir l'égalité $d(X,Y) = p(1-\mathrm{e}^{-p})$ et en déduire la majoration $d(X,Y) \leq p^2$.

Dans la fin de cette partie, on considère un entier n au moins égal à 3, un entier $N > n$, et on note I la matrice identité de $\mathrm{M}_N(\mathbb{R})$ et R la matrice de $\mathrm{M}_N(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la sur-diagonale qui valent 1, c'est-à-dire $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

On considère une n-liste $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ de réels de $[0,1]$, n variables aléatoires X_1, X_2,..., X_n (resp. Y_1, Y_2,..., Y_n), indépendantes suivant des lois de Bernoulli (resp. Poisson) de paramètres respectifs p_1, p_2,..., p_n.
On note, pour tout entier $i \in [\![1,n]\!]$, $P_i = (1-p_i)I + p_i R$ et $Q_i = p_i(R-I)$.

4. **a)** Montrer que la première ligne du produit P_1P_2 est constituée des $n+1$ réels $\mathbf{P}([X_1+X_2=0])$, $\mathbf{P}([X_1+X_2=1])$, ..., $\mathbf{P}([X_1+X_2=n])$ suivis de termes nuls.

b) On note $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que la première ligne du produit $P_1P_2\ldots P_n$ est constituée des $n+1$ réels $\mathbf{P}([U_n=0])$, $\mathbf{P}([U_n=1])$, ..., $\mathbf{P}([U_n=n])$ suivis de termes nuls.

5. On rappelle (ou on admet) que si $A \in \mathrm{M}_N(\mathbb{R})$, la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{r}\frac{A^k}{k!}$ converge, quand r tend vers $+\infty$, vers une matrice notée $\exp A$. *La convergence d'une suite de matrices s'entendant comme la convergence coefficient par coefficient.* On **admet** que si deux matrices A et B de $\mathrm{M}_N(\mathbb{R})$ commutent alors on a $\exp(A+B) = \exp A \times \exp B$.

a) Soit i un entier de $[\![1,n]\!]$ et r un entier naturel. Prouver l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{Q_i^k}{k!} = \sum_{j=0}^{r} \frac{p_i^j}{j!}\Big(\sum_{k=0}^{r-j} \frac{(-1)^k p_i^k}{k!}\Big) R^j.$$

b) En déduire que $\exp Q_i = \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_i^j \,\mathrm{e}^{-p_i}}{j!} R^j$.

c) On note $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$. Montrer que la première ligne du produit $\exp Q_1 \times \exp Q_2 \times \ldots \times \exp Q_n$ est constituée par les N réels $\mathbf{P}([V_n = 0])$, $\mathbf{P}([V_n = 1])$, ..., $\mathbf{P}([V_n = N-1])$.

6. On note, pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le N}$ de $\mathrm{M}_N(\mathbb{R})$, $\|A\| = \displaystyle\max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} |a_{i,j}|$.

a) Prouver, pour tout couple (A,B) d'éléments de $\mathrm{M}_N(\mathbb{R})$ les inégalités

$$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\| \quad \text{et} \quad \|AB\| \le \|A\|\,\|B\|.$$

b) Prouver, pour tout entier $i \in [\![1,n]\!]$, l'inégalité $\left\|\exp Q_i\right\| \le 1$.

c) En remarquant que

$$\prod_{i=1}^{n} P_i - \prod_{i=1}^{n} \exp Q_i = (P_1 - \exp Q_1)\Big(\prod_{i=2}^{n} P_i\Big) + (\exp Q_1)\Big(\prod_{i=2}^{n} P_i - \prod_{i=2}^{n} \exp Q_i\Big),$$

prouver l'inégalité

$$\left\|\prod_{i=1}^{n} P_i - \prod_{i=1}^{n} \exp Q_i\right\| \le \sum_{i=1}^{n} \left\|P_i - \exp Q_i\right\|.$$

d) En exprimant, pour tout entier i de $[\![1,n]\!]$, la matrice $P_i - \exp Q_i$ à l'aide des puissances de la matrice R, prouver l'inégalité $\left\|P_i - \exp Q_i\right\| \le 2p_i^2$.

7. **a)** Déduire des questions précédentes l'inégalité $d(U_n, V_n) \le \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i^2$.

b) Soit $\lambda > 0$. En appliquant le résultat précédent, retrouver la propriété d'approximation usuelle de la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{\lambda}{n}$ par une loi de Poisson.

Partie II Records d'une permutation

On rappelle qu'une permutation d'un ensemble non vide E est une bijection de E sur E. On note, pour tout entier naturel n non nul, $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ (des entiers k tels que $1 \leq k \leq n$) et $\sigma := (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ la permutation σ qui envoie l'entier 1 sur σ_1, 2 sur σ_2, ..., n sur σ_n.
On note $\mathscr{P}(\mathscr{S}_n)$ l'ensemble des parties de $\mathscr{S}_n$ et on munit l'espace probabilisable $(\mathscr{S}_n, \mathscr{P}(\mathscr{S}_n))$ de la probabilité uniforme notée $\mathbf{P}$. Ainsi, pour tout élément σ de $\mathscr{S}_n$, on a $\mathbf{P}(\{\sigma\}) = \dfrac{1}{n!}\cdot$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$. On dit qu'une permutation $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ présente un record au rang k si, pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq k$, on a $\sigma_i \leq \sigma_k$. Ainsi, en particulier, toute permutation présente un record au rang 1. On note $R_n(\sigma)$ le nombre de records que compte la permutation σ. On définit ainsi une variable aléatoire R_n sur $\mathscr{S}_n$. Bien sûr, la variable R_1 est certaine égale à 1. On note, pour tout entier naturel n non nul, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\cdot$

1. Montrer que la suite $(H_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone convergente. On note γ la limite de cette suite.

Dans toute la suite de cette partie **II** on considère un entier n au moins égal à 3.

2. Déterminer la loi de R_3, son espérance et sa variance.

3. Déterminer les probabilités $\mathbf{P}([R_n = 1])$ et $\mathbf{P}([R_n = n])$.

4. **a)** Soit p un entier de $[\![2,n]\!]$. Déterminer le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement 2 records lesquels sont atteints aux rangs 1 et p.

b) Prouver l'égalité : $\mathbf{P}([R_n = 2]) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\cdot$

c) Donner un équivalent de $\mathbf{P}([R_n = 2])$ quand n tend vers l'infini.

5. On introduit, pour tout entier i de $[\![1,n]\!]$, la variable aléatoire T_i, définie sur $(\mathscr{S}_n, \mathscr{P}(\mathscr{S}_n), \mathbf{P})$, qui, à chaque élément σ de $\mathscr{S}_n$, associe la valeur 1 si σ présente un record au rang i et égale à 0 sinon.

a) Montrer que, pour tout entier i de $[\![1,n]\!]$, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{i}\cdot$

b) Calculer l'espérance de la variable R_n et en donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini.

6. **a)** Soit (i,j) un couple d'entiers vérifiant $2 \leq i < j \leq n$.
En calculant la probabilité $\mathbf{P}([T_i = 1] \cap [T_j = 1])$, justifier l'indépendance des variables T_i et T_j.

b) Calculer la variance de la variable R_n et en donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini.

7. On **admet** l'indépendance mutuelle des variables T_1, T_2,..., T_n.
Établir, pour tout entier k de $[\![2,n]\!]$, l'égalité :

$$\mathbf{P}([R_n = k]) = \sum_{2 \leq i_2 < i_3 < \cdots < i_k \leq n} \frac{1}{i_2} \frac{1}{i_3} \cdots \frac{1}{i_k} \prod_{\substack{2 \leq j \leq n \\ j \notin \{i_2, \ldots, i_k\}}} \left(1 - \frac{1}{j}\right).$$

a) En déduire l'égalité : $\mathbf{P}([R_n = 3]) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \dfrac{1}{i\,j}$.

b) Prouver l'équivalence : $\mathbf{P}([R_n = 3]) \sim \dfrac{1}{2} \dfrac{\ln^2 n}{n}$.

Partie III Deux résultats asymptotiques

1. `Un premier résultat`

a) Soit $\varepsilon > 0$. Prouver, pour tout entier n assez grand, l'inclusion entre événements :

$$\left[\,\left|\frac{R_n}{\ln n} - 1\right| \geq \varepsilon\,\right] \subset \left[\,\left|\frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\,\right].$$

b) Soit $\varepsilon > 0$.

(i) Établir l'égalité : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\left[\,\left|\frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n}\right| \geq \varepsilon\,\right]\right) = 0$.

(ii) En déduire l'égalité : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\left[\,\left|\frac{R_n}{\ln n} - 1\right| \geq \varepsilon\,\right]\right) = 0$.

2. `Un second résultat`

On rappelle que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ on note G_X sa fonction génératrice c'est-à-dire la fonction qui, à chaque réel t de $[0,1]$, associe

$$G_X(t) = \mathbf{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k])\, t^k.$$

a) Déterminer la fonction génératrice d'une variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.

b) Déterminer la fonction génératrice d'une variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Justifier l'égalité : $G_{S_n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} G_{X_k}$.

d) Soit $Y, X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On **admet** le résultat suivant : si, pour tout réel t de $[0,1]$, la suite $(G_{X_n}(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $G_Y(t)$, alors la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers Y, c'est-à-dire que, pour tout entier naturel k,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}([X_n = k]) = \mathbf{P}([Y = k]).$$

Soit m un entier naturel au moins égal à 2 et $n = 2m$. On conserve les notations de la partie II et on pose $W_n = \displaystyle\sum_{k=m+1}^{2m} T_k$ (qui compte le nombre aléatoire de records que présente une permutation de $[\![1, 2m]\!]$ entre les rangs $m+1$ et $2m$).

Prouver, pour tout réel t de $[0,1]$, l'égalité : $G_{W_n}(t) = \displaystyle\prod_{i=m+1}^{2m} \left(1 + \frac{t-1}{i}\right)$.

e) En déduire que, lorsque l'entier m tend vers $+\infty$, la suite de terme général W_n converge en loi vers une variable aléatoire qu'on identifiera.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2015

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Toutes les matrices de l'énoncé sont à coefficients réels et, pour tout entier n strictement positif, on note $\mathscr{M}_n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n et $\mathscr{C}_n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices-colonnes à n coefficients ($\mathscr{M}_n$ et $\mathscr{C}_n$ sont donc des notations simplifiées pour $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

L'espace $\mathscr{M}_1$ est identifié à $\mathbb{R}$ et la transposée d'une matrice M, quel que soit son format, est notée ${}^tM$.

On s'intéresse dans ce problème aux matrices carrées H dont les coefficients $h_{i,j}$ ne dépendent que de la somme $i+j$ de leur indice de ligne i et de leur indice de colonne j.
Pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$ et tout entier strictement positif n, on note $H_\varphi^{(n)}$ la matrice carrée de $\mathscr{M}_n$ donnée par :

$$H_\varphi^{(n)} = \Big(\varphi(i+j-2)\Big)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} \varphi(0) & \varphi(1) & \dots & \varphi(n-1) \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(n-1) & \varphi(n) & \dots & \varphi(2n-2) \end{pmatrix}.$$

L'objet du problème est de préciser dans quels cas les matrices $H_\varphi^{(n)}$ définissent un produit scalaire, ce qui permet alors d'écrire leurs coefficients comme les moments d'une variable aléatoire discrète.

Les trois parties du problème sont relativement indépendantes les unes des autres, mais un même exemple apparaît à la fin de chacune d'entre elles.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie 1 : premiers exemples

1. Soit $H = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ ·

   On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont H est la matrice dans la base canonique.

   a) L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle .,. \rangle$, pour lequel la base canonique est orthonormale.

   i) Soit a un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ et D la droite engendrée par a. Déterminer, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$, la projection orthogonale de x sur la droite D.

   ii) Énoncer le théorème spectral. En déduire que le noyau et l'image de h sont deux sous-espaces supplémentaires et orthogonaux de $\mathbb{R}^3$.

   iii) Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ du projecteur orthogonal sur l'image de h.

   b) i) Calculer la trace de l'endomorphisme $h \circ h$.

   ii) En déduire le spectre de l'endomorphisme h.

2. Dans cette question, n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 3 et on note φ la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) = (-1)^k\,(k+1)\ \cdot$$

   On observera que $H_\varphi^{(3)}$ est la matrice de la question précédente.

   a) Soit τ la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \tau(k) = k+1 \cdot$$

   Écrire les matrices $H_\varphi^{(n)}$ et $H_\tau^{(n)}$ et démontrer qu'elles sont semblables.

   b) Soit $\mathscr{B}_n = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

   On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_n$ est $H_\tau^{(n)}$.

   i) Montrer que l'image de g est le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ engendré par les deux vecteurs :

$$\begin{cases} f_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k \\ f_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, e_k \end{cases} .$$

   ii) Justifier la stabilité de F par g et démontrer que la matrice dans la base (f_1, f_2) de l'endomorphisme de F induit par g est :

$$G = \begin{pmatrix} \dfrac{n(n-1)}{2} & \dfrac{n(n^2-1)}{3} \\ n & \dfrac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix} .$$

   c) Déduire des résultats précédents le spectre de $H_\varphi^{(n)}$.

3. Dans cette question, n désigne un nombre entier strictement positif et on note φ la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) = k!\ \cdot$$

a) Soit $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ une matrice-colonne de $\mathscr{C}_n$.

i) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sum_{i=1}^{n} c_i\, t^{i-1})^2\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.

ii) Justifier l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sum_{i=1}^{n} c_i\, t^{i-1})^2\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = {}^tC\, H_\varphi^{(n)}\, C$.

b) Déduire de ce qui précède que toutes les valeurs propres de $H_\varphi^{(n)}$ sont strictement positives.

4. Par un procédé similaire à celui utilisé dans la question précédente, démontrer que toutes les valeurs propres de la matrice $H_\varphi^{(n)}$ sont strictement positives dans le cas où la fonction φ est définie par :
$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) = \frac{1}{k+1}\ \cdot$$

Partie 2 : les formes bilinéaires Δ_n

Tous les polynômes considérés dans la suite du problème sont à coefficients réels et, pour tout entier naturel p, on note E_p l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus p (E_p est donc une notation simplifiée pour $\mathbb{R}_p[X]$).

On considère une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, à laquelle on associe pour tout entier naturel n les applications Δ_n et δ_n définies sur $E_n \times E_n$ et E_{2n} de la manière suivante.

- Pour tout polynôme $A = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in E_n$ et tout polynôme $B = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} b_j X^j \in E_n$, on pose :
$$\Delta_n(A,B) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i\, b_j\, \varphi(i+j)\ \cdot$$
- Pour tout polynôme $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} c_k X^k \in E_{2n}$, on pose : $\quad \delta_n(Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} c_k\, \varphi(k)\ \cdot$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Préciser la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur $E_n \times E_n$.

b) Vérifier que l'application Δ_n est une forme bilinéaire symétrique sur $E_n \times E_n$.

c) Établir, pour tout élément (A,B) de $E_n \times E_n$, l'égalité :
$$\Delta_n(A,B) = \delta_n(AB)\ \cdot$$

d) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur $E_n \times E_n$ qui peuvent s'écrivent $(A,B) \longmapsto \delta(AB)$, avec δ forme linéaire sur E_{2n} ?

2. Dans cette question, on considère un nombre entier naturel d, au moins égal à deux, et une variable aléatoire discrète Y, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, prenant d valeurs distinctes $y_1, y_2, \ldots, y_d$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \ldots, p_d$, strictement positives et de somme égale à 1.

   On se place alors dans le cas où la fonction φ est définie par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) = \mathbf{E}(Y^k),$$

   où $\mathbf{E}(Y^k)$ désigne l'espérance de la variable variable aléatoire Y^k.

   a) Pour tout polynôme Q de E_{2n}, vérifier l'égalité : $\delta_n(Q) = \mathbf{E}\big(Q(Y)\big)\cdot$

   b) En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur n et d, pour que la forme bilinéaire Δ_n soit un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

3. Dans cette question, on suppose que la fonction φ est définie par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) = \frac{1}{k+1}\cdot$$

   a) i) Pour tous (a_0, a_1, a_2) et (b_0, b_1, b_2) éléments de $\mathbb{R}^3$, vérifier l'égalité :

$$\Delta_2(a_2X^2 + a_1X + a_0, b_2X^2 + b_1X + b_0) = {}^tC_A\, H_\varphi^{(3)}\, C_B$$

   où $C_A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $C_B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

   ii) En déduire que Δ_2 est un produit scalaire.

   b) À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, construire à partir de la base canonique $\mathscr{B}_2 = (1, X, X^2)$ de E_2 une base orthonormale $\mathscr{B}_2'$ de E_2 pour le produit scalaire Δ_2.

   c) On note M la matrice de passage de $\mathscr{B}_2$ à $\mathscr{B}_2'$ et N la matrice de passage de $\mathscr{B}_2'$ à $\mathscr{B}_2$.

   i) Montrer que la matrice N est triangulaire.

   ii) Calculer la matrice ${}^tMH_\varphi^{(3)}M$ et en déduire l'égalité : $H_\varphi^{(3)} = {}^tNN$.

   d) Généraliser la démarche précédente pour prouver que, pour tout entier n strictement positif , il existe une matrice triangulaire $T^{(n)}$ de $\mathscr{M}_n$ telle que :

$$H_\varphi^{(n)} = {}^tT^{(n)}\,T^{(n)}\,.$$

Partie 3 : polynômes positifs et matrices de moments

Dans cette partie, on utilise les mêmes notations que dans la partie 2.

On considère donc encore une application $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$, à laquelle on associe pour tout n des applications Δ_n et δ_n définies comme précédemment.

On dit qu'un polynôme P est *positif* s'il est distinct du polynôme nul et si $P(x)$ est positif ou nul pour tout réel x.

1. a) Montrer que l'ordre de multiplicité de toute racine réelle α d'un polynôme positif P est pair.

   b) Montrer que tout polynôme positif Q de degré 2 est somme de deux carrés de polynômes, c'est-à-dire qu'il existe un couple (A, B) de polynômes tels que $Q = A^2 + B^2$.

   c) Pour des polynômes A, B, C, D, écrire le polynôme $(AC + BD)^2 + (AD - BC)^2$ comme produit de deux sommes de deux carrés de polynômes.

   d) En utilisant sa décomposition en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, déduire des résultats précédents que tout polynôme positif est somme de deux carrés de polynômes.

   e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que Δ_n est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$ si et seulement si, pour tout polynôme positif P de E_{2n}, on a : $\quad \delta_n(P) > 0$.

Jusqu'à la fin du problème, on suppose que la fonction φ vérifie l'égalité $\varphi(0) = 1$.

On considère un entier n supérieur ou égal à 2, et on suppose que l'application Δ_n associée à φ est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

On note $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la base orthonormale de E_n (pour ce produit scalaire) obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à partir de $(1, X, \ldots, X^n)$.

2. a) Justifier l'orthogonalité de P_n avec tous les polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 2$.

   b) En déduire que P_n est scindé à racines simples. *On pourra raisonner par l'absurde.*

3. On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les n racines de P_n, réelles et distinctes deux à deux, d'après ce qui précède.

   Pour tout entier k compris entre 1 et n, on note : $L_k = \displaystyle\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i}$.

   a) Montrer que $(L_1, L_2 \ldots, L_n)$ est une base de E_{n-1} et calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i$.

   b) Soit $Q \in E_{2n-1}$.

   i) Justifier l'existence d'un couple $(A, R) \in E_{n-1} \times E_{n-1}$ tel que : $Q = P_n A + R$.

   ii) Vérifier que : $\delta_n(Q) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Q(\alpha_i)\, \delta_n(L_i)$.

   c) Pour tout entier k compris entre 1 et n, on pose : $p_k = \delta_n(L_k)$.

   Démontrer que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont strictement positifs et de somme égale à 1.

4. a) Déduire de ce qui précède qu'il existe une variable aléatoire discrète Z vérifiant la propriété :

$$\forall\, k \in [\![1, 2n-1]\!], \quad \mathbf{E}(Z^k) = \varphi(k) \cdot$$

   b) On revient ici au cas où la fonction φ est définie par : $\quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) = \dfrac{1}{k+1} \cdot$

   Déterminer le nombre minimal de valeurs prises par une variable aléatoire discrète Z vérifiant la propriété précédente.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2015

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h

Le sujet se compose d'un problème et d'un exercice pouvant être traités de manière indépendante. Les différentes parties du problème peuvent également, dans une certaine mesure, être traitées de manière indépendante, quitte à admettre les résultats des parties précédentes. Une liste de résultats susceptibles d'être utiles, et pouvant être utilisés sans qu'il soit nécessaire de les redémontrer, est donnée au début.

La qualité de la rédaction et la précision des réponses apportées entrent pour une part importante dans la notation. Les réponses absurdes sont pénalisées.

Rappel de résultats

Ci-après figurent plusieurs résultats que l'on pourra utiliser sans qu'il soit nécessaire de les redémontrer. Par souci de simplicité, certains énoncés sont donnés dans des cas particuliers (variables aléatoires ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, ou variables aléatoires à valeurs entières), et non pas dans le cadre le plus général possible.

1. **Inégalité triangulaire pour l'espérance** : pour toute variable aléatoire réelle X ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, on a l'inégalité :
$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|).$$

2. **Loi faible des grands nombres** : étant donnée une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 0}$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, on a, sous l'hypothèse que les variables sont indépendantes et de même loi, la loi faible des grands nombres : pour tout $\epsilon > 0$,
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_0+\cdots+X_{n-1}}{n} - \mathbb{E}(X)\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

3. **Espérance d'une fonction d'une variable aléatoire** : étant donnée une variable aléatoire réelle X ne prenant qu'un nombre fini de valeurs distinctes $\{x_1,\ldots,x_m\}$, et une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a l'identité :
$$\mathbb{E}(h(X)) = \sum_{q=1}^{m} h(x_q)\cdot\mathbb{P}(X = x_q).$$

4. **Loi d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes** : étant données deux variables aléatoires réelles X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a, pour tout $k\in\mathbb{N}$, l'identité :
$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j)\cdot\mathbb{P}(Y=k-j).$$

5. **Loi uniforme sur** $[0,1]$: la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ est la loi associée à la densité f définie par
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\in[0,1] \\ 0 & \text{si } x\notin[0,1] \end{cases}.$$
Pour deux nombres a, b tels que $0 \leq a \leq b \leq 1$, on a alors l'identité
$$\mathbb{P}(a < U \leq b) = b - a.$$

6. **Borne sur la probabilité d'une réunion d'événements** : étant donné un nombre $n \geq 1$ d'événements $A_1,\ldots,A_n$ définis sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$, on a l'inégalité :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i).$$

7. **Développement de Taylor de l'exponentielle** : au voisinage de $x=0$, on a le développement limité suivant :
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Problème

Dans ce problème, on étudie, sur un modèle mathématique très simplifié, les conséquences à long terme de la répartition d'un investissement entre un placement sans risque, garantissant un taux de croissance constant, et un placement risqué, dont le taux de croissance est modélisé par une variable aléatoire.

On considère un pas de temps $\delta > 0$, et une succession de dates $t_0, t_1, \dots$ définies par $t_n = n\delta$ pour tout $n \geq 0$. On suppose que, entre deux dates successives, le placement sans risque voit son montant systématiquement multiplié par une constante $\rho \geq 1$. Autrement dit, pour tout $n \geq 0$, x euros investis à la date t_n dans le placement sans risque se transforment en $x \cdot \rho$ euros à la date t_{n+1}. Pour ce qui est du placement risqué, son montant est multiplié entre deux dates successives par une variable aléatoire : pour tout $n \geq 0$, x euros investis à la date t_n dans le placement risqué se transforment en $x \cdot X_n$ euros à la date t_{n+1}, où X_n est une variable aléatoire. On fait l'hypothèse que les variables $(X_n)_{n\geq 0}$ sont indépendantes et de même loi, et ne peuvent prendre que deux valeurs distinctes h (valeur « haute ») et b (valeur « basse »), leur loi commune étant définie par

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_n = h) = p \\ \mathbb{P}(X_n = b) = q \end{cases},$$

où :

- h et b sont deux nombres réels strictement positifs vérifiant la relation $b < h$.
- p et q sont deux nombres réels strictement positifs vérifiant la relation $p + q = 1$.

La stratégie d'investissement que l'on étudie consiste, partant d'un capital initial non-aléatoire $C_0 > 0$ à la date t_0, à répartir à chaque date t_n le montant disponible en une proportion α investie dans le placement risqué, et une proportion $1-\alpha$ dans le placement sans risque, le nombre α étant une constante fixée dans $[0,1]$. On suppose en outre qu'il n'y a au cours du temps ni apport extérieur (hormis le capital initial C_0) ni retrait. Dans la suite, on note C_n le montant disponible à la date C_n obtenu en suivant la stratégie d'investissement étudiée.

Partie I – Quelques résultats généraux

Question 1) Exprimer, pour tout $n \geq 0$, la valeur de C_{n+1} en fonction de C_n, X_n, α et ρ.
Question 2) En déduire la relation, valable pour tout $n \geq 1$:

$$C_n = C_0 \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \left[\alpha X_k + (1-\alpha)\rho\right].$$

Question 3) On définit la fonction $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$\phi(\alpha) = \mathbb{E}\left(\alpha X_0 + (1-\alpha)\rho\right). \tag{1}$$

Déduire de ce qui précède la relation, valable pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}(C_n) = C_0 \times (\phi(\alpha))^n.$$

Question 4) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $C_n > 0$, puis établir pour tout $n \geq 1$ la relation :

$$\ln C_n = \ln C_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\alpha X_k + (1-\alpha)\rho\right).$$

Question 5) On définit la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$g(\alpha) = \mathbb{E}\left(\ln\left(\alpha X_0 + (1-\alpha)\rho\right)\right). \tag{2}$$

Montrer que l'on a la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\ln C_n}{n} - g(\alpha)\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Indication : Exploiter le résultat de la question 4) en faisant appel à la loi des grands nombres.

Question 6) En déduire que l'on peut écrire, pour $n \geq 1$,

$$C_n = e^{n(g(\alpha)+\epsilon_n)},$$

où $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires vérifiant la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$ $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|\epsilon_n| \geq \epsilon) = 0$.

Partie II – Taux de croissance optimal

On introduit la notation $\mu = \mathbb{E}(X_0)$, et, dans toute cette partie, on fait les hypothèses suivantes :

- $b < \rho < h$
- $\mu > \rho$

On introduit également la notation

$$\alpha^* = \frac{\rho(\mu-\rho)}{(h-\rho)(\rho-b)}.$$

Question 7) Donner une expression explicite de $g(\alpha)$ en fonction de α et des autres paramètres du problème (ρ, h, b, p, q).

Question 8) Montrer que l'on a toujours $g(0) \geq 0$.

Question 9) Montrer que, si $\alpha^* < 1$, la fonction g est strictement croissante sur $[0, \alpha^*]$, puis strictement décroissante sur $[\alpha^*, 1]$, et possède donc un unique maximum sur $[0,1]$ atteint en α^*.

Question 10) Montrer que, si $\alpha^* \geq 1$, la fonction g est strictement croissante sur $[0,1]$, et possède donc un unique maximum sur $[0,1]$ atteint en 1.

Question 11) Quelle valeur de α doit-on choisir (selon vous) afin de maximiser la croissance à long terme du montant disponible ? (Justifier la réponse.)

Partie III – Un exemple

On suppose que les paramètres prennent les valeurs suivantes : $h = 1,4$; $b = 0,7$; $\rho = 1,04$; $p = q = 0,5$. On donne la valeur approchée (à $\pm 10^{-3}$ près) $\alpha^* \approx 0,085$.

Question 12) Montrer que sur cet exemple on a $\phi(1) > 1$ et $g(1) < 0$.

Question 13) En déduire que, avec le choix $\alpha = 1$, on a les deux propriétés suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(C_n) = +\infty,$$

et, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n \geq \epsilon) = 0.$$

Comment expliquer l'occurrence simultanée de ces deux propriétés apparemment contradictoires ?

Partie IV – Probabilité de franchissement d'un seuil

On suppose dans cette partie que $h = e^{\ell}$ et $b = e^{-\ell}$, où ℓ est un nombre réel strictement positif, et l'on suppose également que $p > q$. On définit $Z_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$Z_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln X_k.$$

Pour tout entier $m \geq 0$, on introduit l'événement A_m défini par

$$A_m = \{\text{il existe } n \geq 0 \text{ tel que } Z_n = -m \times \ell\}$$

et la probabilité

$$u_m = \mathbb{P}(A_m).$$

Question 14) Montrer que $u_0 = 1$.
Question 15) Montrer que, pour tout $m \geq 1$, on a les identités :

$$\mathbb{P}(A_m | X_0 = h) = \mathbb{P}(A_{m+1}) \text{ et } \mathbb{P}(A_m | X_0 = b) = \mathbb{P}(A_{m-1}).$$

Question 16) En déduire la relation, valable pour tout $m \geq 1$:

$$u_m = p u_{m+1} + q u_{m-1}.$$

Question 17) En déduire qu'il existe des constantes c_1 et c_2 telles que, pour tout $m \geq 0$,

$$u_m = c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^m.$$

On admettra dans la suite que la propriété suivante est vérifiée :

$$\lim_{m \to +\infty} u_m = 0. \tag{3}$$

Question 18) Montrer que, pour tout $m \geq 1$,

$$u_m = \left(\frac{q}{p}\right)^m.$$

Indication : utiliser (3) et les résultats des questions 14) et 17).

Partie V – Passage à la limite

Comme dans la partie IV, on suppose que $h = e^{\ell}$ et $b = e^{-\ell}$. On suppose en outre que les paramètres du modèle sont reliés au pas de temps δ de la manière suivante :

$$\ell = \sigma \cdot \sqrt{\delta}, \; p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\left(m - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma}\sqrt{\delta}\right), \; q = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\left(m - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma}\sqrt{\delta}\right), \; \rho = 1 + r\delta,$$

où r, m et σ sont trois constantes vérifiant $m > r \geq 0$ et $\sigma > 0$, et δ est supposé suffisamment petit pour que p et q soient strictement positifs.
Question 19) Montrer que l'on a les propriétés suivantes lorsque $\delta \to 0^+$:

(i) $\mathbb{E}(X_0) = 1 + m\delta + o(\delta)$

(ii) $\mathbb{V}(X_0) = \sigma^2\delta + o(\delta)$ (la notation $\mathbb{V}$ désigne la variance)
(iii) $\lim_{\delta\to 0^+} \alpha^* = \frac{m-r}{\sigma^2}$.
Indication : Expliciter les valeurs de $\mathbb{E}(X_0)$, $\mathbb{V}(X_0)$ et α^*, puis effectuer un développement limité en δ.
Question 20) On suppose pour simplifier que $r = 0$ et que $\frac{m-r}{\sigma^2} = 1$, de telle sorte que l'on a $\lim_{\delta\to 0^+} \alpha^* = 1$. En supposant que l'on choisit exactement $\alpha = 1$, montrer que l'on a, pour tout $\theta \in]0,1[$, le résultat suivant :

$$\lim_{\delta\to 0+} \mathbb{P}\left[\text{ il existe } n \geq 0 \text{ tel que } \left(\frac{C_n}{C_0}\right) \leq \theta\right] = \theta. \tag{4}$$

Indication : Relier la probabilité figurant dans (4) à la probabilité étudiée dans la partie IV.
Question 21) On peut montrer dans un cadre très général qu'une relation analogue à (4) est valable, lorsque l'on choisit d'investir à chaque pas de temps une proportion α^* du montant disponible dans le placement risqué. Commenter la relation (4) du point de vue du risque associé à une telle stratégie d'investissement à long terme.

Exercice

On considère un entier $N \geq 1$, et N variables aléatoires $B_1,\dots,B_N$ indépendantes. On suppose en outre que, pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$, la variable aléatoire B_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i, où $p_i \in [0,1]$; autrement dit, la loi de B_i est caractérisée par :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(B_i = 1) = p_i \\ \mathbb{P}(B_i = 0) = 1 - p_i \end{cases}.$$

On introduit ensuite la variable S_N définie par

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} B_i,$$

et l'on considère également une variable aléatoire T suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ est défini par

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N} p_i.$$

L'objectif de cet exercice est d'obtenir une borne sur l'écart entre la loi de S_N et la loi de T.
Question A) On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y, X suivant la loi de Poisson de paramètre β, et Y la loi de Poisson de paramètre γ. Montrer que la loi de la variable aléatoire $X+Y$ est la loi de Poisson de paramètre $\beta+\gamma$.
Indication : Calculer la valeur de $\mathbb{P}(X+Y=k)$ pour tout entier $k \geq 0$.
Dans la suite de l'exercice, on considère N variables aléatoires $U_1,\dots,U_N$ indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$.
Question B) Pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$, on définit la variable aléatoire C_i par

$$C_i = \begin{cases} 1 & \text{si } U_i > 1-p_i \\ 0 & \text{si } U_i \leq 1-p_i \end{cases}.$$

Montrer que, pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$, la variable aléatoire C_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p_i.
Indication : calculer la probabilité $\mathbb{P}(C_i = 1)$.

Question C) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, et tout $p \in [0,1]$, on note $g_p(k) = \sum_{j=0}^{k} e^{-p}\frac{p^j}{j!}$, et l'on pose $g_p(-1) = 0$. Pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$, on définit ensuite la variable aléatoire D_i en stipulant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$D_i = k \text{ si et seulement si } g_{p_i}(k-1) < U_i \leq g_{p_i}(k).$$

Montrer que, pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$, la variable aléatoire D_i suit la loi de Poisson de paramètre p_i.
Indication : calculer pour tout k la probabilité $\mathbb{P}(D_i = k)$.
Question D) Représenter sur une figure l'ensemble des valeurs de la variable U_i pour lesquelles on a l'égalité $C_i = D_i$, en tenant compte de l'inégalité $1 - p_i \leq e^{-p_i}$.
Question E) En utilisant l'inégalité $1 - p_i \leq e^{-p_i}$, montrer que, pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$, on a l'inégalité

$$\mathbb{P}(C_i = D_i) \geq 1 - p_i^2. \tag{5}$$

Question F) On introduit l'événement $A = \{\forall i \in \{1,\dots,N\},\ C_i = D_i\}$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bar{A}\right) \leq \sum_{i=1}^{N} p_i^2, \tag{6}$$

où $\bar{A}$ désigne l'événement complémentaire de A.
Dans la suite de l'exercice, on considère les variables aléatoires

$$C = \sum_{i=1}^{N} C_i \ \text{ et } \ D = \sum_{i=1}^{N} D_i.$$

Question G) Montrer que la loi de C est identique à la loi de S_N, et que la loi de D est identique à la loi de T.
Question H) On considère un sous-ensemble $H \subset \mathbb{N}$, et l'on introduit les variables aléatoires V et W définies respectivement par

$$V = \begin{cases} 1 & \text{si } C \in H \\ 0 & \text{si } C \notin H \end{cases} \quad \text{et} \quad W = \begin{cases} 1 & \text{si } D \in H \\ 0 & \text{si } D \notin H \end{cases}.$$

Montrer que l'on a les identités

$$\mathbb{P}(C \in H) = \mathbb{E}(V) \ \text{ et } \ \mathbb{P}(D \in H) = \mathbb{E}(W).$$

Question I) Déduire de la question précédente que l'on a l'inégalité

$$|\mathbb{P}(C \in H) - \mathbb{P}(D \in H)| \leq \mathbb{E}\left(|V - W|\right).$$

Question J) On introduit la variable aléatoire Y définie par

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ n'est pas réalisé} \\ 0 & \text{si } A \text{ est réalisé} \end{cases}.$$

Montrer que l'on a l'inégalité $|V - W| \leq Y$.
Question K) En faisant la synthèse des questions précédentes, montrer que

$$|\mathbb{P}(S_N \in H) - \mathbb{P}(T \in H)| \leq \sum_{i=1}^{N} p_i^2. \tag{7}$$

Expliquer en quoi ce résultat répond à l'objectif de l'exercice présenté au début.
Question L) On se donne un nombre réel positif h tel que $h \leq N$, et l'on fait l'hypothèse que $p_i = h/N$ pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$. Quelles sont alors les lois respectives de S_N et T ? Quelle est dans ce cas la valeur du membre de droite de l'inégalité (7) ? Comment se comporte celui-ci lorsque $N \to \infty$?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2015

Épreuve à option (C) : Économie

Durée : 4h

Ce sujet se compose de deux parties distinctes (probabilités et optimisation économique) pouvant être traitées de manière totalement indépendante.

Probabilités

`Cette partie compte pour 1/3 de la note`

Notations et hypothèses

On considère une famille de variables aléatoires réelles positives $(X_n)_{n\geq 1}$, que l'on suppose indépendantes et de même loi. On suppose en outre que les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ possèdent une espérance et une variance finies. Pour tout $n \geq 1$, on définit la variable aléatoire S_n par :

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

et l'on pose également :

$$S_0 = 0.$$

On considère ensuite une variable aléatoire N à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots\}$, supposée indépendante de la famille de variables $(X_n)_{n\geq 1}$, et l'on définit la variable aléatoire

$$S_N = X_1 + \cdots + X_N.$$

On introduit également la fonction ϕ, définie pour tout nombre réel $\lambda > 0$ par :

$$\phi(\lambda) = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda X_1}\right),$$

ainsi que la fonction G définie pour tout $x \in [0, 1]$ par :

$$G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \mathbb{P}(N = k).$$

Un rappel sur l'espérance

Dans la suite, étant donnée une variable aléatoire X possédant une espérance, et un événement A tel que $\mathbb{P}(A) > 0$, on utilise la notation $\mathbb{E}(X|A)$ pour désigner l'espérance de la variable aléatoire X par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$ conditionnelle à A, que l'on peut écrire :

$$\mathbb{E}(X|A) = \frac{\mathbb{E}(X \cdot \mathbf{1}_A)}{\mathbb{P}(A)},$$

où $\mathbf{1}_A$ est la variable aléatoire indicatrice de l'événement A, c'est-à-dire la variable aléatoire définie par :

$$\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } A \text{ n'est pas réalisé} \end{cases}.$$

Dans ce contexte, on a l'analogue de la formule des probabilités totales : étant donné un système complet d'événements $(A_i)_{i\in I}$ (où I est un ensemble fini ou dénombrable), on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in I} \mathbb{E}(X|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i). \tag{1}$$

Questions à traiter

Question 1) Pour $n \geq 1$, exprimer la valeur de l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$, de la variance $\mathbb{V}(S_n)$, et de l'espérance $\mathbb{E}\left((S_n)^2\right)$ en fonction de n, $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_1)$.
Question 2) Etant donné un entier n tel que $\mathbb{P}(N = n) > 0$, exprimer la valeur de $\mathbb{E}(S_N | N = n)$.
Question 3) En déduire l'identité :

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{E}(X_1).$$

Question 4) Etant donné un entier n tel que $\mathbb{P}(N = n) > 0$, exprimer la valeur de $\mathbb{E}\left((S_N)^2 | N = n\right)$.
Question 5) En déduire l'identité

$$\mathbb{V}(S_N) = \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(N) \cdot (\mathbb{E}(X_1))^2.$$

Commenter la différence entre cette formule et celle obtenue pour $\mathbb{V}(S_n)$.
Question 6) On introduit la fonction ψ définie pour tout $\lambda > 0$ par :

$$\psi(\lambda) = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda S_N}\right).$$

Montrer que l'on a, pour tout $\lambda > 0$, la relation

$$\psi(\lambda) = G(\phi(\lambda)).$$

Indication : Calculer d'abord $\mathbb{E}\left(e^{-\lambda S_n}\right)$, puis $\mathbb{E}\left(e^{-\lambda S_N} | N = n\right)$.
Question 7) On suppose que les v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ ont pour loi commune la loi de Bernoulli de paramètre p, autrement dit $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$, et d'autre part que N suit la loi de Poisson de paramètre $\rho > 0$.

(i) Pour $n \geq 1$ donné, quelle est la loi de S_n ?
(ii) Expliciter la valeur de $\phi(\lambda)$ en fonction de λ.
(iii) Expliciter la valeur de $G(x)$ en fonction de x.
(iv) En déduire que S_N suit la loi de Poisson de paramètre $\rho \cdot p$.

Question 8) On suppose que les v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ ont pour loi commune la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, et l'on définit explicitement la variable aléatoire N comme le plus petit entier n tel que $X_n = 1$, soit

$$N = \inf\{n \geq 1 \;:\; X_n = 1\}.$$

(i) Quelle est la loi de N ? Que vaut $\mathbb{E}(N)$?
(ii) Quelle est l'unique valeur possible pour la variable aléatoire S_N ?
(iii) L'hypothèse d'indépendance de N vis-à-vis des variables $(X_n)_{n\geq 1}$ est-elle vérifiée ?
(iii) Montrer que l'on a, sur cet exemple, la relation $\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{E}(X_1)$
(iv) Montrer que, si l'on pose $N' = N - 1$, la relation $\mathbb{E}(S_{N'}) = \mathbb{E}(N') \cdot \mathbb{E}(X_1)$ n'est pas vérifiée.

Optimisation économique

`Cette partie compte pour 2/3 de la note`

Problème 1

`7 points : 1+2+2+2`

Soit un marché composé de n firmes identiques de type i. Une firme i représentative de ce marché a une fonction de coût que l'on peut spécifier de la manière suivante :

$$CT(q) = 4q^2 - 6q + 4.$$

La demande au marché est représentée par la fonction $Q^D = 170 - P$. On suppose que pour $n \geq 20$, le marché est en concurrence pure et parfaite.

Déterminez les prix et quantités optimales dans les cas suivants :

1. $n = 1$
2. $n = 1$ et le monopole est public (vous préciserez les deux types de tarification)
3. $n = 80$
4. Dans le dernier cas, en absence de barrières à l'entrée, on suppose qu'il existe une autre technologie j caractérisée par la fonction de coût suivante :

   $$CT(q) = 2q^2 - 4q + 4.$$

   Les firmes de type j réussissent-elles à pénétrer le marché ? Déterminez les prix et quantités d'équilibre de long terme ainsi que le nombre de firmes. De quelles firmes s'agit-il ?

Problème 2

`7 points : 2+2+3`

Soit un marché composé de 2 firmes dont les fonctions de coût sont les suivantes :

$$CT_1 = q_1 \ ; \ CT_2 = \frac{1}{2}q_2^2.$$

La demande au marché est représentée par la fonction suivante : $P = 4 - Q^D$.

1. Déterminez l'équilibre de Cournot (prix et quantités) de ce marché ainsi que le profit optimal de chaque entreprise.
2. On suppose que l'entreprise 2 est en situation de dominante. Déterminez l'équilibre de Stackelberg (prix et quantités) de ce marché, ainsi que le profit optimal de chaque entreprise.
3. Les 2 entreprises forment à présent un cartel. Déterminez leurs niveaux de production respectifs. Les 2 firmes ont-elles toujours intérêt à s'entendre ? Quelles sont les conséquences de l'entente pour le consommateur ?

Problème 3

`6 points : 2+2+2`

Soit à présent une économie composée de 5 ménages caractérisés par les anticipations suivantes sur les taux d'intérêt futurs : $i^a = 2\%$; 4% ; 6% ; 8% et 10 %. Chaque ménage a la possibilité de placer une épargne d'une valeur de 1000 euros en monnaie ou titre.

1. Sachant que le taux d'intérêt d'aujourd'hui est de 5%, déterminez la demande optimale de monnaie de spéculation, la demande optimale de titres ainsi que les gains anticipés de chaque agent.
2. Tracez la courbe de demande de monnaie à des fins de spéculation pour les valeurs de taux d'intérêt suivantes : 1%, 2%, 5%, 7% et 15%.
3. Explicitez le principe de « trappe à liquidité ».

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2015

Épreuve de français

Durée : 2h

Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas, c'est-à-dire, le plus grand,* comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé. Le candidat doit indiquer sur sa copie les tranches de 50 mots ainsi que le nombre total de mots utilisés.

Quand on cherche les conditions psychologiques des progrès de la science, on arrive bientôt à cette conviction *que c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique*[1]. Et il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes, comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer les faiblesses des sens et de l'esprit humain : c'est dans l'acte même de connaître, intimement, qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie que nous appellerons des obstacles épistémologiques. La connaissance du réel est une lumière qui projette toujours quelque part des ombres. Elle n'est jamais immédiate et pleine. Les révélations du réel sont toujours récurrentes. Le réel n'est jamais « ce qu'on pourrait croire » mais il est toujours ce qu'on aurait dû penser. La pensée empirique est claire, *après coup*, quand l'appareil des raisons a été mis au point. En revenant sur un passé d'erreurs, on trouve la vérité en un véritable repentir intellectuel. En fait, on connaît *contre* une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même, fait obstacle à la spiritualisation.

L'idée de partir de zéro pour fonder et accroître son bien ne peut venir que dans des cultures de simple juxtaposition où un fait connu est immédiatement une richesse. Mais devant le mystère du réel, l'âme ne peut se faire, par décret, ingénue. Il est alors impossible de faire d'un seul coup table rase des connaissances usuelles. Face au réel, ce qu'on croit savoir clairement offusque ce qu'on devrait savoir. Quand il se présente à la culture scientifique, l'esprit n'est jamais jeune. Il est même très vieux, car il a l'âge de ses préjugés. Accéder à la science, c'est, spirituellement rajeunir, c'est accepter une mutation brusque qui doit contredire un passé.

La science, dans son besoin d'achèvement comme dans son principe, s'oppose absolument à l'opinion. S'il lui arrive, sur un point particulier, de légitimer l'opinion, c'est pour d'autres raisons que celles qui fondent l'opinion ; de sorte que l'opinion a, en droit, toujours tort. L'opinion *pense* mal ; elle ne *pense pas* ; elle *traduit* des besoins en connaissances. En désignant les objets par leur utilité, elle s'interdit de les connaître. On ne peut rien fonder sur l'opinion : il faut d'abord la détruire. Elle est le premier obstacle à surmonter : il ne suffirait pas, par exemple, de la rectifier sur des points particuliers, en maintenant, comme une sorte de morale provisoire, une connaissance vulgaire provisoire. L'esprit scientifique nous interdit d'avoir une opinion sur des questions que nous ne savons pas formuler clairement. Avant tout, il faut savoir poser des problèmes. Et quoi qu'on dise, dans la vie scientifique, les problèmes ne se posent pas d'eux-mêmes. C'est précisément ce *sens du problème* qui donne la marque du véritable esprit scientifique. Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit.

Une connaissance acquise par un effort scientifique peut elle-même décliner. La question abstraite et franche s'use : la réponse concrète reste. Dès lors l'activité spirituelle s'invertit et se bloque. Un obstacle épistémologique s'incruste sur la connaissance non questionnée. Des habitudes intellectuelles qui furent utiles et saines peuvent, à la longue, entraver la recherche. « Notre esprit, dit justement M. Bergson a une irrésistible tendance à considérer

1. Tous les termes en italiques désignent les passages soulignés par l'auteur.

comme plus claire l'idée qui lui sert le plus souvent » (*La Pensée et le Mouvant*). L'idée gagne une clarté intrinsèque abusive. A l'usage, les idées se *valorisent* indûment. Une valeur en soi s'oppose à la circulation des valeurs. C'est un facteur d'inertie pour l'esprit. Parfois une idée dominante polarise un esprit dans sa totalité. Un épistémologue irrévérencieux disait, il y a vingt ans, que les grands hommes sont utiles à la science dans la première moitié de leur vie, nuisibles dans la seconde moitié. *L'instinct formatif* finit par céder devant l'instinct *conservatif*. Il vient un temps où l'esprit aime mieux ce qui confirme son savoir que ce qui le contredit, où il aime mieux les réponses que les questions. Alors l'instinct conservatif domine, la croissance spirituelle s'arrête.

Comme on le voit, nous n'hésitons pas à invoquer les instincts pour marquer la juste résistance de certains obstacles épistémologiques. (...) Dès maintenant, il faut se rendre compte que la connaissance empirique engage l'homme sensible par tous les caractères de sa sensibilité. Quand la connaissance empirique se rationalise, on n'est jamais sûr que des valeurs sensibles primitives ne coefficientent [2] pas les raisons. D'une manière bien visible, on peut reconnaître que l'idée scientifique trop familière se charge d'un concret psychologique trop lourd, qu'elle amasse trop d'analogies, d'images de métaphores, et qu'elle perd peu à peu son *vecteur d'abstraction*, sa fine pointe abstraire. En particulier, c'est verser dans un vain optimisme que de penser que savoir sert automatiquement à savoir, que la culture devient d'autant plus facile qu'elle est plus étendue, que l'intelligence enfin, sanctionnée par des succès précoces, par de simples concours universitaires, se capitalise comme une richesse matérielle. En admettant même qu'une *tête bien faite* échappe au narcissisme intellectuel si fréquent dans la culture littéraire, dans l'adhésion passionnée aux jugements de goût, on peut sûrement dire qu'une tête bien faite est malheureusement une tête fermée. C'est un produit d'école.

En fait les crises de croissance de la pensée impliquent une refonte totale du système du savoir. La tête bien faite doit alors être refaite. Elle change d'espèce. Elle s'oppose à l'espèce précédente par une fonction décisive. Par les révolutions spirituelles que nécessite l'invention scientifique, l'homme devient une espèce mutante, ou pour mieux dire encore, une espèce qui a besoin de muter, qui souffre de ne pas changer. Si l'on voulait bien considérer par exemple la modification psychique qui se trouve réalisée par la compréhension d'une doctrine comme la Relativité ou la Mécanique ondulatoire, on ne trouverait peut-être pas ces expressions exagérées, surtout si l'on réfléchissait à la réelle solidité de la science anté-relativiste (...) En résumé, l'homme animé par l'esprit scientifique désire sans doute savoir, mais c'est aussitôt pour mieux interroger.

G. Bachelard, *La Formation de l'esprit scientifique*, 1938.

2. Néologisme signifiant : qui affectent d'un coefficient. Ici, il indique la contamination de l'idée scientifique par le concret, le sensible, chargé d'analogies, d'images et de métaphores trompeuses.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2015

Épreuve d'anglais

Durée : 2h

1 Translate the following text into French

Couple in 40s 'too old for loan'

One of Britain's biggest banks has become the first to be officially reprimanded for age discrimination after telling a couple in their forties that they were too old to get a mortgage.

The Financial Ombudsman Service has ruled HSBC was wrong and unfair to refuse the couple's mortgage application because the husband would have turned 65 by the time the mortgage would need to have been paid off.

The couple, who do not wish to be named, applied for a joint £250,000 mortgage over 18 years on their home, in which they have substantial equity.

HSBC refused to consider their application on account of the husband's age. This was despite the fact that he did not plan to retire at 65 and his final salary pension would have been large enough to cover the monthly repayments. Moreover, his wife would have been able to pay the loan from her income alone, if necessary.

The couple complained, saying they had been victims of discrimination. The ombudsman service — headed by Caroline Wayman, a former barrister — upheld the complaint and ordered HSBC to pay £500.

Like many lenders, HSBC has tightened its rules and does not offer loans with a term beyond a borrower's 65th birthday: "As a responsible lender, we need to ensure our customers' ability to repay their mortgage.

Adapted from The Sunday Times, 12 April 2015

2 Summarize this text in English in 180 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

In Accepting Bitcoin, Rand Paul Raises Money and Questions
Adapted from The New York Times, April 9, 2015

WASHINGTON — Presidential fund-raising, never known for its transparency, may have just become even more secretive.

In announcing his candidacy for president this week, Senator Rand Paul of Kentucky waded into new waters when he said he would accept campaign contributions in Bitcoins, a largely untraceable virtual currency, in amounts up to $100.

Interested donors at randpaul.com were given three options for making a contribution: a credit card, PayPal or Bitcoins. While some state and federal candidates in California, Colorado, New Hampshire and elsewhere have started accepting Bitcoins, Mr. Paul, a Republican, is the first presidential candidate to do so.

The novelty of the payment method is likely to help Mr. Paul highlight his edgy appeal to other libertarians, tech-savvy voters, young people and others who favor Bitcoins. But it also raises questions about whether illegal contributions could make their way into campaigns more easily.

The Bitcoin itself is essentially untraceable if the owner wants to maintain anonymity, and political candidates who accept them must rely largely on donors' disclosing their identity.

Federal law bans contributions to individual candidates from foreigners, corporations or straw donors, among other restrictions, and campaigns are expected to make their "best efforts" to collect and publicly identify donors who contribute more than $200 in a year and to detect contributions that may be illegal.

"At some level, we are trusting candidates," said Richard L. Hasen, a campaign finance expert at the University of California, Irvine, School of Law. The system already relies on some measure of trust from candidates, he said, "but the difference with Bitcoin is that it is inherently untraceable."

In a ruling last year, the Federal Election Commission agreed to allow a political action committee to accept Bitcoins with a voluntary limit of $100, but the commissioners split over how the online currency — which can fluctuate widely in value — should be treated on a broader scale or whether it should be capped.

"Bitcoins are no more anonymous than any other contribution," wrote Lee E. Goodman, a Republican commissioner who was then the chairman of the panel. He said that technological innovations should be embraced in the political system and that Bitcoins should be treated no differently than a computer, securities, a painting or other legal, "in-kind" contributions.

But the three Democratic commissioners — Ann M. Ravel, Steven T. Walther and Ellen L. Weintraub — were much more cautious in endorsing the limited use of Bitcoins.

Bitcoins should be treated the same as cash, with a cap of $100, to protect against unethical and illegal activities, the three commissioners wrote. "The fact that Bitcoins are ultimately untraceable makes prophylactic measures at the outset of the transaction particularly important," they said. The commission did not adopt the cap.

For Mr. Paul, who has been sharply critical of the government's electronic surveillance programs as an attack on privacy, his embrace of Bitcoins — with their added layers of privacy — is a way to establish his bona fides with younger voters who put a premium on Internet freedom and technology.

"This is certainly new territory," said David Mitrani, a Washington lawyer who specializes in campaign finance law and has represented several candidates who have accepted Bitcoins.

As an experiment, Mr. Mitrani tried to make an online donation of more than $200 in Bitcoins on Mr. Paul's campaign website — above the voluntary limit that his campaign placed on Bitcoin donations.

The donation was rejected. "Bitcoin donations are limited to $100," the automated response said. "If you would like to contribute more than $100, you may select Credit Card as your payment option and contribute up to $2,600 for the primary election and up to $2,600 for the general election."

Bitcoin enthusiasts predicted that Mr. Paul would be the first of many presidential candidates to rake in Bitcoins.

"Rand Paul is at the forefront of a tech revolution, like the first candidates to have websites," said Brian Klein, a Los Angeles lawyer and a Bitcoin supporter who has represented many clients involved in the currency.

"I bet other presidential candidates will follow his lead, and soon," Mr. Klein said. "I also believe in a year or two, this won't be a story because every candidate will accept Bitcoins — just like every candidate has a website."