Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique.
Mathématiques.

Partie I. Préliminaires

1) (a) Soit $n \geqslant n_0$.

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = (S_{n+1} - S_n) - \left(\int_{n_0}^{n+1} f(t)\ dt - \int_{n_0}^{n} f(t)\ dt\right) = f(n+1) - \int_{n}^{n+1} f(t)\ dt = \int_{n}^{n+1} (f(n+1) - f(t))\ dt.$$

Puisque la fonction f est décroissante sur $[n_0, +\infty[$, pour tout réel $t \in [n, n+1]$, $f(n+1) - f(t) \leqslant 0$ puis $\gamma_{n+1} - \gamma_n \leqslant 0$. La suite $(\gamma_n)_{n \geqslant n_0}$ est donc décroissante.

Soit $n \geqslant n_0$. Toujours par décroissance de la fonction f sur $[n_0, +\infty[$,

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} (k+1-k)f(k) \geqslant \sum_{k=n_0}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)\ dt = \int_{n_0}^{n+1} f(t)\ dt$$

puis $\gamma_n \geqslant \displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(t)\ dt - \int_{n_0}^{n} f(t)\ dt = \int_{n}^{n+1} f(t)\ dt \geqslant 0$ car f est positive sur $[n_0, +\infty[$. La suite $(\gamma_n)_{n \geqslant n_0}$ est donc décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite $(\gamma_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers un certain réel positif ou nul.

(b) La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$. D'après la question précédente, il existe un réel positif ℓ tel que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} - \int_{2}^{n} \frac{1}{t \ln t}\ dt \underset{n \to +\infty}{=} \ell + o(1).$$

Pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\int_{2}^{n} \frac{1}{t \ln t}\ dt = [\ln|\ln t|]_2^n = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$ et donc

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \underset{n \to +\infty}{=} \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \ell + o(1).$$

Le réel $C = -\ln(\ln 2) + \ell$ convient.

(c) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2 \ln t}$ est continue sur $[2, +\infty[$ et pour $X \geqslant 2$,

$$\int_{2}^{X} \frac{1}{t \ln^2 t}\ dt = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^X = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln X}.$$

Quand X tend vers $+\infty$, $\displaystyle\int_{2}^{X} \frac{1}{t \ln^2 t}\ dt$ converge vers le réel $\dfrac{1}{\ln 2}$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2 t}\ dt$ est une intégrale convergente. Mais alors, la suite $\left(\displaystyle\int_{2}^{n} \frac{1}{t \ln^2 t}\ dt\right)_{n \geqslant 2}$ est une suite convergente.

Puisque la fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{t^2 \ln t}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$ (en tant qu'inverse d'une fonction croissante et strictement positive sur $[2, +\infty[$), la suite $(\gamma_n)_{n \geqslant 2}$ converge d'après la question (a). Mais alors, la suite $(S_n)_{n \geqslant 2} = \left(\displaystyle\int_{2}^{n} \frac{1}{t \ln^2 t}\ dt\right)_{n \geqslant 2} + (\gamma_n)_{n \geqslant 2}$ converge. On a montré que la série de terme général $\dfrac{1}{k \ln^2 k}$, $k \geqslant 2$, converge.

2) $k^{3/2} \dfrac{\ln k}{k(k-1)} \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln k}{\sqrt{k}} \underset{k \to +\infty}{\to} 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, $\dfrac{\ln k}{k(k-1)} \underset{k \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k^{3/2}}\right)$.
Puisque $\dfrac{3}{2} > 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{k^{3/2}}$, $k \geqslant 2$, converge, il en est de même de la série de terme général $\dfrac{\ln k}{k(k-1)}$, $k \geqslant 2$.

3) a) Soit $n \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto \ln t$ et continue et croissante sur $]1, +\infty[$. Donc,

$$\sum_{k=2}^{n}\ln k \geqslant \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\ln t\,dt = \int_{1}^{n}\ln t\,dt = [t\ln t - t]_{1}^{n} = n\ln n - n + 1.$$

(b) D'autre part, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln k \leqslant \sum_{k=2}^{n}\ln n = (n-1)\ln n \leqslant n\ln n$. En résumé, pour $n \geqslant 2$,

$$n\ln n - n + 1 \leqslant \sum_{k=2}^{n}\ln k \leqslant n\ln n.$$

On en déduit que pour $n \geqslant 2$,

$$\left|\frac{\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln k\right) - n\ln n}{n}\right| \leqslant \frac{n-1}{n} \leqslant 1$$

et donc $\dfrac{\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln k\right) - n\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} O(1)$ puis $\ln(n!) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln k \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n + O(n)$.

4) a) Soit $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x > 0$, on pose $f_n(x) = x\ln x - \lambda x - \ln n$. f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f_n'(x) = \ln x + 1 - \lambda.$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} f_n'(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n'(x) = +\infty$. Puisque la fonction f_n' est continue sur $]0,+\infty[$, la fonction f_n' s'annule au moins une fois sur $]0,+\infty[$ en un certain réel a, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
De plus, la fonction f_n' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions strictement croissantes sur $]0,+\infty[$. Donc, f_n' est injective sur $]0,+\infty[$ ce qui assure l'unicité d'un réel en lequel f_n' s'annule. Puisque la fonction f_n' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, pour $0 < x < a$, on a $f_n'(x) < f_n'(a) = 0$ et pour $x > a$, on a $f_n'(x) > 0$. La fonction f_n est donc strictement décroissante sur $]0,a]$ et strictement croissante sur $[a,+\infty[$.

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0} f_n(x) = -\ln n \leqslant 0$, on en déduit que pour tout $x \in]0,a]$, $f_n(x) < 0$ et en particulier, $f_n(x) \neq 0$. En suite, f_n est continue et strictement croissante sur $[a,+\infty[$ et de plus, $f_n(a) < 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty > 0$ (car $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln x$). On en déduit que f_n s'annule une fois et une seule sur $[a,+\infty[$.

En résumé, f_n s'annule une fois et une seule dans $]0,+\infty[$. Ceci montre l'existence et l'unicité de r_n.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $r_n\ln r_n - \lambda r_n = \ln n$. D'autre part, l'étude de la fonction $x \mapsto x - \ln x$ (qui admet un minimum en 1 égal à 1) montre que $\forall x > 0$, $x > \ln x$ et donc, puisque $r_n > 0$,

$$r_n^2 > r_n\ln r_n = \ln n + \lambda r_n \geqslant \ln n,$$

puis $r_n > \sqrt{\ln n}$. Ceci montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n = +\infty$. Mais alors,

$$\ln n = r_n\ln r_n - \lambda r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} r_n\ln r_n.$$

On en déduit encore que $\ln(\ln n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(r_n\ln r_n) = \ln(r_n) + \ln(\ln(r_n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(r_n)$ et donc que $\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} r_n\ln(\ln n)$. Finalement,

$$r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{\ln(\ln n)}.$$

5) (a) i. Soient F une partie finie de $\mathbb{N}^*$ puis $m = \text{card}(F)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant d_n(F) = \frac{1}{n}\text{card}(F \cap [\![1,n]\!]) \leqslant \frac{1}{n}\text{card}(F) = \frac{m}{n}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{m}{n} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} d_n(F) = 0$ et donc que $d(F) = 0$.

(a) ii. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $a\mathbb{N}^* \cap [\![1,n]\!] = \{ka/\ k \in \mathbb{N}^* \text{ et } 1 \leqslant ka \leqslant n\}$. Or, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$1 \leqslant ka \leqslant n \Leftrightarrow \frac{1}{a} \leqslant k \leqslant \frac{n}{a} \Leftrightarrow 1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{a}\right].$$

Donc, card $(a\mathbb{N}^* \cap [\![1, n]\!]) = \left[\dfrac{n}{a}\right]$ (y compris si $n < a$) puis

$$d_n(a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{n}\left[\frac{n}{a}\right].$$

On en déduit que

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{a} - 1\right) \leqslant d_n(a\mathbb{N}^*) \leqslant \frac{1}{n} \times \frac{n}{a} = \frac{1}{a},$$

et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n(a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a}$. Par suite, $d(a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a}$.

(a) iii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $C \cap [\![1, n]\!] = \left\{k^2 / \ k \in \mathbb{N}^* \text{ et } 1 \leqslant k^2 \leqslant n\right\} = \left\{k^2 / \ k \in \mathbb{N}^* \text{ et } 1 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}\right\}$. Donc, card $(C \cap [\![1, n]\!]) = \left[\sqrt{n}\right]$ puis

$$d_n(C) = \frac{1}{n}\left[\sqrt{n}\right].$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant d_n(C) \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n(C) = 0$. Par suite, $d(C) = 0$.

(b) Soient E_1 et E_2 deux parties disjointes de $\mathbb{N}^*$ possédant une densité.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$d_n(\mathbb{N}^* \setminus E_1) = \frac{1}{n}\text{card}\left((\mathbb{N}^* \setminus E_1) \cap [\![1, n]\!]\right) = \frac{1}{n}\left(n - \text{card}\left(E_1 \cap [\![1, n]\!]\right)\right) = 1 - d_n(E_1).$$

Quand n tend vers $+\infty$, $d_n(\mathbb{N}^* \setminus E_1)$ tend vers $1 - d(E_1)$. Donc, $\mathbb{N}^* \setminus E_1$ admet une densité et $d(\mathbb{N}^* \setminus E_1) = 1 - d(E_1)$.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} d_n(E_1 \cup E_2) &= \frac{1}{n}\text{card}\left((E_1 \cup E_2) \cap [\![1, n]\!]\right) = \frac{1}{n}\text{card}\left((E_1 \cap [\![1, n]\!]) \cup (E_2 \cap [\![1, n]\!])\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\text{card}\left(E_1 \cap [\![1, n]\!]\right) + \text{card}\left(E_2 \cap [\![1, n]\!]\right)\right) \\ &= d_n(E_1) + d_n(E_2). \end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, $d_n(E_1 \cup E_2)$ tend vers $d(E_1 \cup E_2)$. Donc, $E_1 \cup E_2$ admet une densité et $d(E_1 \cup E_2) = d(E_1) + d(E_2)$.

(c) Montrons qu'il existe une partie de $\mathbb{N}^*$ n'ayant pas de densité.

On commence par écrire $E = \{1, 3, \dots\}$ de sorte que $d_2(E) = \dfrac{1}{2}$ puis on complète de manière à refaire passer $d_n(E)$ au dessus de $\dfrac{3}{4}$: $E = \{1, 3, 4, \dots\}$ de sorte que $d_2(E) = \dfrac{1}{2}$ et $d_4(E) = \dfrac{3}{4}$ puis on ramène $d_n(E)$ à $\dfrac{1}{2}$: $E = \{1, 3, 4, 8, \dots\}$: $d_8(E) = \dfrac{1}{2}$ puis on ramène $d_n(E)$ à $\dfrac{3}{4}$: $E = \{1, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \dots\}$ de sorte que $d_{16}(E) = \dfrac{3}{4}$ puis on ramène $d_n(E)$ à $\dfrac{1}{2}$: $E = \{1, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 26, \dots\}$ de sorte que $d_{26}(E) = \dfrac{1}{2}$ ...

La suite $(d_n(E))$ n'est pas convergente car cette suite admet deux suites extraites, convergentes, de limites distinctes ($\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{4}$). L'ensemble E ainsi « construit » n'admet donc pas de densité.

On en déduit que d n'est pas une probabilité sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$.

6) a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Alors, $0 < m < m + 1 < 2m + 1$ puis

$$\begin{aligned} 2^{2m+1} = (1+1)^{2m+1} &= \sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k} \geqslant \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{(2m+1)-(m+1)} \\ &= 2\binom{2m+1}{m}, \end{aligned}$$

puis $\dbinom{2m+1}{m} \leqslant 2^{2m} = 4^m$.

(b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit p un nombre premier tel que $r+1 < p \leqslant 2r+1$.

$$\binom{2r+1}{r} = \frac{(2r+1)(2r)\ldots(r+2)}{r!}$$

puis $\displaystyle\prod_{k=r+2}^{2r+1} k = r!\binom{2r+1}{r}$. p divise $\displaystyle\prod_{k=r+2}^{2r+1} k = r!\binom{2r+1}{r}$. Mais, puisque p est un nombre premier strictement supérieur à r, p est premier avec chacun des entiers $1, 2, \ldots, r$ et donc p est premier avec le produit de ces entiers, c'est-à-dire $r!$. En résumé, p divise $r!\binom{2r+1}{r}$ et p est premier avec $r!$. D'après le théorème de Gauss, p divise $\binom{2r+1}{r}$.

Ainsi, $\binom{2r+1}{r}$ est divisible par chacun des nombres premiers p tels que $r+1 < p \leqslant 2r+1$ et donc $\binom{2r+1}{r+1}$ est divisible par $\displaystyle\prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2r+1\\ p\in\mathscr{P}}} p$.

(c) Montrons par récurrence forte que $\forall n \geqslant 2$, $\displaystyle\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} p \leqslant 4^n$.

- $\displaystyle\prod_{\substack{p\leqslant 2\\ p\in\mathscr{P}}} p = 2 \leqslant 16 = 4^2$. L'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 2$.

- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\displaystyle\prod_{\substack{p\leqslant k\\ p\in\mathscr{P}}} p \leqslant 4^k$.

  Si $n+1$ est pair, puisque $n+1 \geqslant 3$, $n+1$ n'est pas premier. Donc, par hypothèse de récurrence,

  $$\prod_{\substack{p\leqslant n+1\\ p\in\mathscr{P}}} p = \prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} p \leqslant 4^n \leqslant 4^{n+1}.$$

  Sinon $n+1$ est impair et donc, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ (car $n+1 \geqslant 3$) tel que $n+1 = 2r+1$ et donc aussi $r = \dfrac{n}{2}$. D'après la question précédente, $\displaystyle\prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2r+1\\ p\in\mathscr{P}}} p$ divise $\binom{2r+1}{r}$ et en particulier, $\displaystyle\prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2r+1\\ p\in\mathscr{P}}} p \leqslant \binom{2r+1}{r}$. D'après la question 6)(a) et par hypothèse de récurrence (car $r+1 < r+r+1 = n+1$ ou encore $r+1 \leqslant n$),

  $$\begin{aligned}\prod_{\substack{p\leqslant n+1\\ p\in\mathscr{P}}} p &= \left(\prod_{\substack{p\leqslant r+1\\ p\in\mathscr{P}}} p\right) \times \left(\prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2r+1\\ p\in\mathscr{P}}} p\right)\\ &\leqslant 4^{r+1} \times \binom{2r+1}{r} \leqslant 4^{r+1} \times 4^r = 4^{2r+1} = 4^{n+1}.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

7) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $p \in \mathscr{P}$ et $k \in \mathbb{N}$. Il s'agit de compter le nombre de multiple de p^k qui appartiennent à $[\![1, n]\!]$. Or, pour $q \in \mathbb{N}^*$,

$$1 \leqslant qp^k \leqslant n \Leftrightarrow \frac{1}{p^k} \leqslant q \leqslant \frac{n}{p^k} \Leftrightarrow 1 \leqslant q \leqslant \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

Il y a donc $\left[\dfrac{n}{p^k}\right]$ multiples de p^k qui appartiennent à $[\![1, n]\!]$ ou encore $\alpha_k = \left[\dfrac{n}{p^k}\right]$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
v_p(n!) &= v_p(1)+v_p(2)+\ldots+v_p(n) = \sum_{d=1}^{n} v_p(d)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{d\in[\![1,n]\!]\\ v_p(d)=k}} v_p(d)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\sum_{\substack{d\in[\![1,n]\!]\\ v_p(d)=k}} 1\right)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k\beta_k \text{ (la somme étant en fait finie).}
\end{aligned}$$

(c) $v_p(d)=k$ si et seulement si p_k divise d et p^{k+1} ne divise pas d. Il y a α_k entiers éléments de $[\![1,n]\!]$ divisibles par p^k auxquels on retire les α_{k+1} entiers éléments de $[\![1,n]\!]$ divisibles par p^{k+1} et on obtient $\beta_k=\alpha_k-\alpha_{k+1}$ puis

$$\begin{aligned}
v_p(n!) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\beta_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\alpha_k-\alpha_{k+1}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k - \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_{k+1} \text{ (les sommes sont finies)}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k - \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)\alpha_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k - \sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)\alpha_k\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right].
\end{aligned}$$

(d) Puisque $0<\dfrac{1}{p}<1$, on en déduit que

$$v_p(n!) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{n}{p^k} = \frac{n}{p}\times\frac{1}{1-\dfrac{1}{p}} = \frac{n}{p-1}$$

et d'autre part,

$$v_p(n!) \geqslant E\left(\frac{n}{p}\right) \geqslant \frac{n}{p}-1.$$

Donc, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall p\in\mathscr{P}$, $\dfrac{n}{p}-1\leqslant v_p(n!)\leqslant\dfrac{n}{p-1}$.

8) Soit $n\geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k a_k &= \varepsilon_1 a_1 + \sum_{k=2}^{n}\varepsilon_k\left(A_k-A_{k-1}\right) = \varepsilon_1 A_1 + \sum_{k=2}^{n}\varepsilon_k A_k - \sum_{k=2}^{n}\varepsilon_k A_{k-1}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k A_k - \sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon_{k+1}A_k = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1}\right)A_k + \varepsilon_n A_n.
\end{aligned}$$

9) a) Soit $\omega\in\Omega$ tel que $|X_N(\omega)-E(X_N)|\leqslant\dfrac{1}{2}a_N^{2/3}$. Alors, pour tout $N\in\mathbb{N}$,

$$|X_N(\omega)-a_N|\leqslant|X_N(\omega)-(a_N+b_N)|+|b_N|\leqslant\frac{1}{2}a_N^{2/3}+|b_N|.$$

D'autre part, (b_N) est une suite bornée et a_N tend vers $+\infty$ (et donc $a_N^{2/3}$ tend vers $+\infty$). Donc, pour N assez grand, $|b_N|\leqslant\dfrac{1}{2}a_N^{2/3}$ (car par exemple, $\dfrac{|b_N|}{a_N^{2/3}}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$). Par suite, pour N assez grand,

$$|X_N(\omega)-a_N|\leqslant\frac{1}{2}a_N^{2/3}+\frac{1}{2}a_N^{2/3}=a_N^{2/3}.$$

Ainsi, pour N assez grand, $\left[|X_N-E(X_N)|\leqslant\dfrac{1}{2}a_N^{2/3}\right]\subset\left[|X_N-a_N|\leqslant a_N^{2/3}\right]$.

(b) Par passage au complémentaire, on en déduit déjà que pour N assez grand, $\left[|X_N - a_N| > a_N^{2/3}\right] \subset \left[|X_N - E(X_N)| > \dfrac{1}{2}a_N^{2/3}\right]$ et donc que

$$0 \leqslant P\left(|X_N - a_N| > a_N^{2/3}\right) \leqslant P\left(|X_N - E(X_N)| > \frac{1}{2}a_N^{2/3}\right) \leqslant P\left(|X_N - E(X_N)| \geqslant \frac{1}{2}a_N^{2/3}\right).$$

En suite, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$0 \leqslant P\left(|X_N - a_N| \geqslant \frac{1}{2}a_N^{2/3}\right) \leqslant \frac{4V(X_N)}{a_N^{4/3}}.$$

Par hypothèse, $\dfrac{4V(X_N)}{a_N^{4/3}} \underset{N\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{a_N^{1/3}}\right)$ et en particulier, $\dfrac{V(X_N)}{a_N^{4/3}} \underset{N\to+\infty}{=} o(1)$. Mais alors,

$$\lim_{N\to+\infty} P\left(|X_N - a_N| > a_N^{2/3}\right) = 0.$$

Partie II. Deux résultats asymptotiques

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$, $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} v_p(n!)\ln p$ est une somme vide et donc $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} v_p(n!)\ln p = 0 = \ln(n!)$.

Sinon, $n \geqslant 2$ puis $n! \geqslant 2$. Un facteur premier de $n!$ est un nombre premier p divisant le produit $1 \times 2 \times \ldots \times n$ et donc divisant l'un des entiers 2 ou 3 ou … ou n. En particulier, $p \leqslant n$. La décomposition primaire de $n!$ peut donc s'écrire

$$n! = \prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} p^{v_p(n!)}$$

et on en déduit encore une fois que

$$\ln(n!) = \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} v_p(n!)\ln p.$$

(b) D'après la question 7.(d),

$$\begin{aligned}\frac{\ln(n!)}{n} &= \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{v_p(n!)}{n}\ln p \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{\ln p}{p-1} = \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{\ln p}{p} + \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{\ln p}{p(p-1)}\\ &\leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{\ln p}{p} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln k}{k(k-1)} = \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{\ln p}{p} + K\end{aligned}$$

et donc $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{\ln p}{p} \geqslant \frac{\ln(n!)}{n} - K$. D'autre part

$$\begin{aligned}\frac{\ln(n!)}{n} &= \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{v_p(n!)}{n}\ln p \geqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)\ln p\\ &= \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{n}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \ln p = \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} p\right)\\ &\geqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{n}\ln\left(4^n\right) \text{ (d'après la question 6.(c))}\\ &= \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{\ln p}{p} - \ln 4\end{aligned}$$

et donc $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{\ln p}{p}\leqslant\frac{\ln(n!)}{n}+\ln 4$. On a montré que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{\ln(n!)}{n}-K\leqslant\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{\ln p}{p}\leqslant\frac{\ln(n!)}{n}+\ln 4.$$

(c) On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{\ln p}{p}&\underset{n\to+\infty}{=}\frac{\ln(n!)}{n}+O(1)\\&\underset{n\to+\infty}{=}\frac{n\ln n+O(n)}{n}+O(1)\ \text{(d'après la question 3.(c))}\\&\underset{n\to+\infty}{=}\ln n+O(1).\end{aligned}$$

2) a) Soit $n\geqslant 3$. On pose de plus, pour $k\geqslant 2$, $\varepsilon_k=\dfrac{1}{\ln k}$. D'après la question 8,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{1}{p}&=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln k}\frac{\chi(k)\ln k}{k}=\sum_{k=2}^{n}\varepsilon_k a_k=\sum_{k=2}^{n-1}\left(\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1}\right)A_k+\varepsilon_n A_n\\&=\sum_{k=2}^{n-1}\left(\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1}\right)A_k+\frac{A_n}{\ln n}.\end{aligned}$$

De plus, pour $k\geqslant 2$,

$$\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1}=\frac{1}{\ln k}-\frac{1}{\ln(k+1)}=\frac{\ln(k+1)-\ln k}{\ln k\ln(k+1)}=\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)}{\ln k\ln(k+1)}$$

et donc,

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{1}{p}=\sum_{k=2}^{n-1}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)}{\ln k\ln(k+1)}A_k+\frac{A_n}{\ln n}.$$

(b) D'après la question II.1.(c), $A_k=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}a_i=\sum_{\substack{p\leqslant k\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{\ln p}{p}\underset{k\to+\infty}{=}\ln k+O(1)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)}{\ln k\ln(k+1)}A_k&=\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)}{\ln k+\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)}\times\frac{A_k}{\ln k}\underset{k\to+\infty}{=}\frac{\dfrac{1}{k}+O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)}{\ln k+O\left(\dfrac{1}{k}\right)}\times\left(1+O\left(\frac{1}{\ln k}\right)\right)\\&\underset{k\to+\infty}{=}\frac{1}{k\ln k}\frac{1+O\left(\dfrac{1}{k}\right)}{1+O\left(\dfrac{1}{k\ln k}\right)}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln k}\right)\right)\\&\underset{k\to+\infty}{=}\frac{1}{k\ln k}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{k\ln k}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\ln k}\right)\right)\underset{k\to+\infty}{=}\frac{1}{k\ln k}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln k}\right)\right)^3\\&\underset{k\to+\infty}{=}\frac{1}{k\ln k}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln k}\right)\right)\underset{k\to+\infty}{=}\frac{1}{k\ln k}+O\left(\frac{1}{k\ln^2 k}\right).\end{aligned}$$

(c) On en déduit déjà que $\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln n\ln(n+1)}A_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n\ln n}$ et donc que $A_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n\ln^2 n\dfrac{1}{n\ln n}=\ln n$ puis que

$\dfrac{A_n}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et en particulier $\dfrac{A_n}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{=} O(1)$. D'autre part, d'après la question I.1.(c), la série de terme général $\dfrac{1}{k\ln^2 k}$ converge et donc la série de terme général $O\left(\dfrac{1}{k\ln^2 k}\right)$ converge. On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} O\left(\dfrac{1}{k\ln^2 k}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O(1)$. Par suite, d'après la question I.1.(b),

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln k\ln(k+1)}A_k &= \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k\ln k} + \sum_{k=2}^{n-1} O\left(\frac{1}{k\ln^2 k}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(\ln n) + C + o(1) + O(1) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(\ln n) + O(1).\end{aligned}$$

puis

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln k\ln(k+1)}A_k + \frac{A_n}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(\ln n) + O(1) + O(1) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(\ln n) + O(1).$$

Partie III.

1) a) Soit $n \geqslant 2$. Tout facteur premier de n est supérieur ou égal à 2. Donc,

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k} \geqslant \prod_{k=1}^{r} p_k \geqslant \prod_{k=1}^{r} 2 = 2^r$$

puis $\ln n \geqslant r\ln 2 = \omega(n)\ln 2$ et donc $\omega(n) \leqslant \dfrac{\ln n}{\ln 2}$.

(b) Supposons $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$. Si $r \geqslant 2$, les nombres premiers distincts de 2 sont impairs. Donc, $p_1 \geqslant 2$, puis, par récurrence, $\forall k \in [\![2, r]\!]$, $p_k \geqslant 2k-1$. On en déduit que

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k} \geqslant \prod_{k=1}^{r} p_k \geqslant 2\prod_{k=2}^{r}(2k-1) = 2\prod_{k=1}^{r-1}(2k+1).$$

Si $r = 1$, l'inégalité reste vraie avec la convention $\displaystyle\prod_{k=1}^{r-1}(2k+1) = 1$.

Si $r \geqslant 2$, (erreur d'énoncé ?) on obtient

$$\begin{aligned}\ln n &\geqslant \ln\left(2\prod_{k=1}^{r-1}(2k+1)\right) = \ln\left(2\frac{(2r)\times(2r-1)\times\ldots\times 3\times 2}{(2r)\times(2r-2)\times\ldots\times 4\times 2}\right) = \ln\left(\frac{(2r)!}{2^{r-1}r!}\right)\\ &= \ln((2r)!) - \ln(r!) - (r-1)\ln 2\\ &\geqslant (2r\ln(2r) - (2r) + 1) - (r\ln r) - (r-1)\ln 2 \text{ (d'après la question I.3.(a))}\\ &= r\ln r + 2r\ln 2 - 2r - r\ln 2 + \ln 2 + 1 = r\ln r - (2-\ln 2)r + 1 + \ln 2\\ &\geqslant r\ln r - (2-\ln 2)r + 2 - \ln 2 = r\ln r - (2-\ln 2)(r-1)\\ &\geqslant (r-1)\ln(r-1) - (2-\ln 2)(r-1).\end{aligned}$$

Ainsi, si f est la fonction $f : x \mapsto x\ln x - \lambda x$ de la question I.4.(a) (avec $\lambda = 2 - \ln 2 > 0$), on a pour $r \geqslant 2$

$$f(r-1) = (r-1)\ln(r-1) - (2-\ln 2)(r-1) \leqslant \ln n = f(r_n).$$

L'étude de la fonction f effectuée à la question I.4.(a) montre que $r-1 \leqslant r_n$ (car on ne peut avoir $r-1 > r_n$) (ce qui reste vrai si $r = 1$) puis, d'après la question I.4.(b)

$$\omega(n) = r \leqslant r_n + 1 \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{\ln n}{\ln(\ln n)}\right).$$

On a montré que $\omega(n) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{\ln n}{\ln(\ln n)}\right)$.

2) (a) Le nombre de multiples de r qui sont éléments de $[\![1, d]\!]$ est $\left[\dfrac{N}{r}\right]$ (où $[x]$ est la partie entière du réel x) d'après la question I.5.(a).ii, et donc

$$E\left(X_{N,r}\right) = \frac{1}{N}\sum_{d=1}^{N} X_{N,r}(d) = \frac{1}{N}\sum_{\substack{r \text{ divise } d\\ 1\leqslant d\leqslant N}} 1 = \frac{1}{N}\left[\frac{N}{r}\right].$$

On en déduit encore par linéarité que

$$E\left(X_N\right) = \sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} E\left(X_{N,p}\right) = \frac{1}{N}\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}}\left[\frac{N}{p}\right].$$

(b) On note tout d'abord que pour tout $r \in [\![1, N]\!]$, $X_{N,r}^2 = X_{N,r}$ puis, par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}
E\left(X_N^2\right) &= E\left(\sum_{\substack{(p,q)\in[\![1,N]\!]^2\\ (p,q)\in\mathscr{P}^2}} X_{N,p}X_{N,q}\right) = E\left(\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} X_{N,p}^2 + \sum_{\substack{(p,q)\in[\![1,N]\!]^2\\ (p,q)\in\mathscr{P}^2 \text{ et } p\neq q}} X_{N,p}X_{N,q}\right)\\
&= E\left(\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} X_{N,p}\right) + \sum_{\substack{(p,q)\in[\![1,N]\!]^2\\ (p,q)\in\mathscr{P}^2 \text{ et } p\neq q}} E\left(X_{N,p}X_{N,q}\right)\\
&= E\left(X_N\right) + \sum_{\substack{(p,q)\in[\![1,N]\!]^2\\ (p,q)\in\mathscr{P}^2 \text{ et } p\neq q}} E\left(X_{N,p}X_{N,q}\right).
\end{aligned}$$

Maintenant, si $p \neq q$, $X_{N,p}X_{N,q}(d) = 1 \Leftrightarrow d$ multiple de p et de $q \Leftrightarrow d$ multiple de pq. Donc, comme précédemment, $E\left(X_{N,p}X_{N,q}\right) = \dfrac{1}{N}\left[\dfrac{N}{pq}\right]$. On a montré que

$$E\left(X_N^2\right) = E\left(X_N\right) + \frac{1}{N}\sum_{\substack{(p,q)\in[\![1,N]\!]^2\\ (p,q)\in\mathscr{P}^2 \text{ et } p\neq q}}\left[\frac{N}{pq}\right].$$

(c) Tout d'abord $0 \leqslant E\left(X_N\right) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}}\left[\frac{N}{p}\right] \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{1}{p}$. D'après la question II.2.(c), $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{1}{p} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(\ln N) + O(1)$ et donc,

$$E\left(X_N\right) \underset{N\to+\infty}{=} O(\ln(\ln N)).$$

Ensuite, d'après la formule de Koënig-Huygens,

$$\begin{aligned}
V\left(X_N\right) - E\left(X_N\right) = E\left(X_N^2\right) - \left(E\left(X_N\right)\right)^2 - E\left(X_N\right) &= \sum_{\substack{(p,q)\in[\![1,N]\!]^2\\ (p,q)\in\mathscr{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \frac{1}{N}\left[\frac{N}{pq}\right] - \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{1}{N}\left[\frac{N}{p}\right]\right)^2\\
&\leqslant \sum_{\substack{(p,q)\in[\![1,N]\!]^2\\ (p,q)\in\mathscr{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \frac{1}{N}\frac{N}{pq} - \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{1}{N}\left(\frac{N}{p}-1\right)\right)^2\\
&\quad \text{(pour } N \text{ suffisamment grand de sorte que } \sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{1}{N}\left(\frac{N}{p}-1\right) \geqslant 0\text{)}\\
&= \sum_{\substack{(p,q)\in[\![1,N]\!]^2\\ (p,q)\in\mathscr{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \frac{1}{pq} - \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{1}{p} - \sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{1}{N}\right)^2
\end{aligned}$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{V}(\mathsf{X}_\mathsf{N}) - \mathsf{E}(\mathsf{X}_\mathsf{N}) &\leqslant \sum_{\substack{(p,q)\in[\![1,N]\!]^2\\ (p,q)\in\mathscr{P}^2 \text{ et } p\neq q}} \frac{1}{pq} - \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p} - 1\right)^2 \text{ (toujours pour N assez grand)}\\
&= \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p}\right)^2 - \sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p^2} - \left(\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p}\right)^2 + 2\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p} - 1\\
&\leqslant 2\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
0 \leqslant \mathsf{V}(\mathsf{X}_\mathsf{N}) \leqslant \mathsf{E}(\mathsf{X}_\mathsf{N}) + 2\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}.
$$

Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ converge, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \underset{N\to+\infty}{=} O(1)$ et donc

$$
\mathsf{E}(\mathsf{X}_\mathsf{N}) + 2\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \underset{N\to+\infty}{=} O\ln(\ln N)).
$$

Finalement, $\mathsf{V}(\mathsf{X}_\mathsf{N}) \underset{N\to+\infty}{=} O(\ln(\ln N))$.

(d) Pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(\mathsf{X}_\mathsf{N}) &= \frac{1}{N}\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \left[\frac{N}{p}\right] = \frac{1}{N}\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{N}{p} + \frac{1}{N}\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \left(\left[\frac{N}{p}\right] - \frac{N}{p}\right)\\
&= \sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p} + \frac{1}{N}\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \left(\left[\frac{N}{p}\right] - \frac{N}{p}\right)\\
&= \ln(\ln N) + \left(\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p} - \ln(\ln N) + \frac{1}{N}\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \left(\left[\frac{N}{p}\right] - \frac{N}{p}\right)\right).
\end{aligned}
$$

On pose alors $a_N = \ln(\ln N)$ et $\displaystyle b_N = \sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p} - \ln(\ln N) - \frac{1}{N}\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \left(\frac{N}{p} - \left[\frac{N}{p}\right]\right)$ de sorte que $\mathsf{E}(\mathsf{X}_\mathsf{N}) = a_N + b_N$.

(a_N) est une suite positive, de limite $+\infty$. D'autre part, $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p} - \ln(\ln N) \underset{N\to+\infty}{=} O(1)$ d'après la question II.2.(c) puis

$$
0 \leqslant \frac{1}{N}\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} \left(\frac{N}{p} - \left[\frac{N}{p}\right]\right) \leqslant \frac{1}{N}\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{P}}} 1 \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} 1 = 1.
$$

On en déduit que (b_N) est une suite bornée en tant que somme de deux suites bornées. Enfin, d'après la question précédente, $\mathsf{V}(\mathsf{X}_\mathsf{N}) \underset{N\to+\infty}{=} O(a_N)$.

D'après la question, I.9.(b), $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} P\left(|X_N - a_N| > a_N^{2/3}\right) = 0$ ou encore

$$
\lim_{N\to+\infty} P\left(|X_N - \ln(\ln N)| > (\ln(\ln N))^{2/3}\right) = 0,
$$

avec

$$\begin{aligned}
P\left(|X_N - \ln(\ln N)| > (\ln(\ln N))^{2/3}\right) &= \frac{1}{N}\text{card}\left\{n \in [\![1, N]\!],\ |X_N(n) - \ln(\ln N)| > (\ln(\ln N))^{2/3}\right\} \\
&= \frac{1}{N}\text{card}\left\{n \in [\![1, N]\!],\ |\omega(n) - \ln(\ln N)| > (\ln(\ln N))^{2/3}\right\}.
\end{aligned}$$

