Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique.
Mathématiques. Option A

Partie I. Solutions de l'équation de réplication scalaire

1) (a) Pour $x \in]0,1[$, $\varphi(x) = -\dfrac{1}{x} + \ln x - \ln(1-x)$. φ est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout réel x,

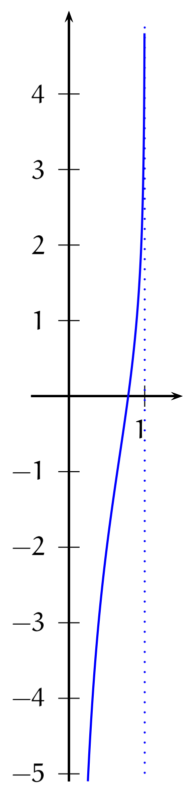
$$\varphi'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{(1-x) + x(1-x) + x^2}{x^2(1-x)} = \frac{1}{x^2(1-x)} > 0.$$

φ est continue et strictement croisante sur $]0,1[$.Donc, φ est une bijection de $]0,1[$ sur $\varphi(]0,1[) = \left]\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x), \lim\limits_{x\to 1} \varphi(x)\right[$.

Pour $x > 0$, $\varphi(x) = \dfrac{-1 + x\ln x}{x} - \ln(1-x)$ et donc $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{x}$ d'après un théorème de croissances comparées puis $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = -\infty$.
D'autre part, $\varphi(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\ln(1-x)$ et donc $\lim\limits_{x\to 1} \varphi(x) = +\infty$.

Finalement, φ est une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Allure du graphe de φ.



(c) Soit a un réel donné de $]0,1[$, $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \underset{x\to 1}{\to} +\infty$ et donc $\text{Sup}\left\{\dfrac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x},\ (x,y) \in]0,1[^2,\ x \neq y\right\} = +\infty$. φ n'est pas lipschitzienne sur $]0,1[$. Par contre, φ' est continue et donc bornée sur tout segment de $]0,1[$ et donc φ est lipschitzienne sur tout segment de $]0,1[$.

Pour $x \in]0,1[$, posons $u(x) = x^2(1-x) = x^2 - x^3$. Pour $x \in]0,1[$, $u'(x) = 2x - 3x^2 = x(2-3x)$. u est strictement positive sur $]0,1[$ et admet un maximum en $\dfrac{2}{3}$ égal à $u\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{9}\left(1 - \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{27}$. Donc, pour tout réel x de $]0,1[$, $\varphi'(x) \geqslant \dfrac{27}{4}$.
Puisque la fonction φ' ne s'annule pas sur $]0,1[$, on sait que la fonction φ^{-1} est dérivable sur $\varphi(]0,1[) = \mathbb{R}$ puis que, pour tout réel y,

$$0 \leqslant \left(\varphi^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(y)\right)} \leqslant \frac{4}{27}.$$

Ainsi, $\left(\varphi^{-1}\right)'$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et on sait alors que φ^{-1} est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (par exemple de rapport $\dfrac{4}{27}$).

2) (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,1[$, la fonction $u \mapsto \dfrac{f'(u)}{(f(u))^2(1-f(u))}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit l'existence de l'intégrale proposée.

D'après la question, la fonction $u \mapsto \varphi(f(u))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée la fonction $u \mapsto \dfrac{f'(u)}{(f(u))^2(1-f(u))}$. Donc,

$$\int_0^t \frac{f'(u)}{(f(u))^2(1-f(u))}\,du = [\varphi(f(u))]_0^t = \varphi(f(t)) - \varphi(f(0)).$$

(b) Existence. Pour tout réel t, posons $f(t) = \varphi^{-1}(at+\varphi(y))$. La fonction $t \mapsto at+\varphi(y)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction φ^{-1} est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,1[$. Donc, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,1[$ puis, pour tout réel t

$$f'(t) = \frac{a}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(at+\varphi(y))\right)} = a\left(\varphi^{-1}(at+\varphi(y))\right)^2\left(1-\varphi^{-1}(at+\varphi(y))\right) = a(f(t))^2(1-f(t))$$

et d'autre part, $f(0) = \varphi^{-1}(\varphi(y)) = y$. Donc, la fonction f convient. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $f_y(t) = \varphi^{-1}(at+\varphi(y))$.

Unicité. Soit f est une solution de (2). Nécessairement, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,1[$ et pour tout réel t,

$$\varphi(f(t)) - \varphi(y) = \varphi(f(t)) - \varphi(f(0)) = \int_0^t \frac{f'(u)}{(f(u))^2(1-f(u))}\,du = \int_0^t a\,du = at$$

puis

$$f(t) = \varphi^{-1}(at+\varphi(y)) = f_y(t).$$

Ceci démontre l'unicité de f_y.

3) (a) Soit $[a,b] \subset]0,1[$. Soit $(y,z) \in [a,b]^2$. Pour tout réel t, d'après la question 1.(c),

$$\begin{aligned}|f_y(t) - f_z(t)| &= \left|\varphi^{-1}(at+\varphi(y)) - \varphi^{-1}(at+\varphi(z))\right| \leqslant \frac{4}{27}\,|(at+\varphi(y)) - (at+\varphi(z))| = \frac{4}{27}|\varphi(y)-\varphi(z)| \\ &\leqslant \frac{4}{27}\,\|\varphi'\|_{\infty,[a,b]}\,|y-z| \text{ (d'après l'inégalité des accroissements finis)},\end{aligned}$$

et donc, $\|\Phi(y) - \Phi(z)\|_\infty \leqslant \dfrac{4}{27}\,\|\varphi'\|_{\infty,[a,b]}\,|y-z|$. L'application Φ est donc lipschitzienne sur $[a,b]$ et en particulier continue sur $[a,b]$.

Ainsi, Φ est continue sur tout segment de $]0,1[$ et donc sur $]0,1[$.

(b) • $]0,1[$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$ et Φ est continue sur $]0,1[$ à valeurs dans $\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (car pour tout $y \in]0,1[$ et tout réel t, $0 < f(t) < 1$). Donc, $\mathscr{S} = \Phi(]0,1[)$ est un connexe par arcs de $(\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

• Soit $g = f_{\frac{1}{2}} \in \mathscr{S}$. Pour $\varepsilon > 0$ et pour $t \in \mathbb{R}$, posons $h_\varepsilon(t) = g(t) + \dfrac{2}{\pi}\varepsilon \operatorname{Arctan} t$. h_ε est un élément de $\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que $\|h_\varepsilon - g\|_\infty = \varepsilon$. De plus, $h_\varepsilon(0) = \dfrac{1}{2}$ puis $a\left(h_\varepsilon(0)\right)^2\left(1-h_\varepsilon(0)\right) = \dfrac{a}{8}$ et $h'_\varepsilon(0) = g'(0) + \dfrac{2}{\pi}\varepsilon = \dfrac{a}{8} + \dfrac{2}{\pi}\varepsilon$. Pour toute valeur de $\varepsilon > 0$, $h'_\varepsilon(0) \neq a\left(h_\varepsilon(0)\right)^2\left(1-h_\varepsilon(0)\right)$ et donc $h_\varepsilon \notin \mathscr{S}$.
Ceci montre que toute boule ouverte $B(g,\varepsilon)$ sauf peut-être une, contient au moins un élément h_ε de $\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui n'est pas dans $\mathscr{S}$ et donc $\mathscr{S}$ n'est pas une partie ouverte de l'espace vectoriel $(\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$.

• Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de $\mathscr{S}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément et en particulier simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui est bornée sur $\mathbb{R}$. Il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0,1[$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \varphi^{-1}\left(at+\varphi\left(y_n\right)\right).$$

On note que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = f_n(0) \in]0,1[$ puis que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(0)$. $f(0)$ est donc nécessairement un élément de $[0,1]$.

• Si $y = f(0) \in]0,1[$, alors pour tout réel t, par continuité de φ sur $]0,1[$ et de φ^{-1} sur $\mathbb{R}$,

$$f(t) = \lim_{n\to+\infty} \varphi^{-1}\left(at+\varphi\left(y_n\right)\right) = \varphi^{-1}\left(at+\varphi\left(y\right)\right) = f_y(t),$$

et donc, la fonction f est la fonction f_y. Ainsi, f est un élément de $\mathscr{S}$.

• Si $f(0)=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(y_n) = -\infty$ et donc, pour tout réel t, on a nécessairement

$$f(t) = \lim_{n\to+\infty} \varphi^{-1}\left(at + \varphi(y_n)\right) = \lim_{X\to-\infty} \varphi^{-1}(X) = 0.$$

f est donc nécessairement la fonction nulle. Mais pour $n \in \mathbb{N}$, si $a > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} |f_n(t) - f(t)| = 1$ et si $a < 0$, $\lim\limits_{t\to-\infty} |f_n(t) - f(t)| = 1$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f - f_n\|_\infty \geqslant 1$ ce qui contredit le fait que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.

• De même, si $f(0)=1$, f est nécessairement la fonction constante $t \mapsto 1$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.

En résumé, toute suite d'éléments de $\mathscr{S}$, qui converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$, converge dans $\mathscr{S}$. Donc, $\mathscr{S}$ est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(\mathscr{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$.

Partie II. Etude du cas où $p = 2$

1) Notons ℓ la limite de g en $+\infty$ et ℓ' la limite de g'. Soit $x > 0$. La fonction g est continue sur $[x, 2x]$ et dérivable sur $]x, 2x[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c(x) \in]x, 2x[$ tel que $g(2x) - g(x) = xg'(c(x))$. Quand x tend vers $+\infty$, $g(2x) - g(x)$ tend vers $\ell - \ell = 0$. D'autre part, puisque $c(x) > x$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} c(x) = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(c(x)) = \ell'$. Si $\ell' \neq 0$, $g(2x) - g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ell' x$ ce qui contredit $\lim\limits_{x\to+\infty} g(2x) - g(x) = 0$. Donc, $\ell' = 0$.

2) (a)

$$\begin{aligned}
x' = hx &\Rightarrow x' - hx = 0 \Rightarrow e^{-H}x' - he^{-H}x = 0 \Rightarrow \left(e^{-H}x\right)' = 0 \\
&\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ e^{-H(t)}x(t) = e^{-H(0)}x(0) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = x(0)e^{H(t)-H(0)}.
\end{aligned}$$

(b) Si $x(0) > 0$, alors pour $t \in \mathbb{R}$, $x(t) > 0$ et si $x(0) < 0$, alors pour $t \in \mathbb{R}$, $x(t) < 0$. En particulier, la fonction x ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Enfin, si $x(0) = 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = 0$.

3) (a) Pour tout réel t,

$$\begin{aligned}
f_1'(t) + f_2'(t) &= \langle e_1 - f(t), Af(t)\rangle f_1(t) + \langle e_2 - f(t), Af(t)\rangle f_2(t) \\
&= \langle f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2, Af(t)\rangle - \langle f(t), Af(t)\rangle f_1(t) - \langle f(t), Af(t)\rangle f_2(t) \\
&= \langle f(t), Af(t)\rangle - \langle f(t), Af(t)\rangle f_1(t) - \langle f(t), Af(t)\rangle f_2(t) \\
&= \langle f(t), Af(t)\rangle (1 - f_1(t) - f_2(t)).
\end{aligned}$$

(b) Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $x(t) = f_1(t) + f_2(t) - 1$ et $h(t) = -\langle f(t), Af(t)\rangle$ de sorte que pour tout réel t, $x'(t) = h(t)x(t)$. On a $x(0) = f_1(0) + f_2(0) - 1 = x_0 + 1 - x_0 - 1 = 0$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ et donc, d'après la question précédente, pour tout réel t, $x(t) = 0$ ou encore, pour tout réel t, $f_1(t) + f_2(t) = 1$.

4) (a) Pour tout réel t,

$$\begin{aligned}
\langle e_1 - f(t), Af(t)\rangle &= (1 - f_1(t))\left(af_1(t) + cf_2(t)\right) - f_2(t)\left(bf_1(t) + cf_2(t)\right) \\
&= (1 - f_1(t))\left((a-c)f_1(t) + c\right) - (1 - f_1(t))\left((b-c)f_1(t) + c\right) \\
&= (a-b)\left(1 - f_1(t)\right) f_1(t)
\end{aligned}$$

et donc

$$f_1'(t) = (a-b)\left(f_1(t)\right)^2\left(1 - f_1(t)\right).$$

Si $a = b$, alors pour tout réel t, $f_1'(t) = 0$ puis pour tout réel t, $f_1(t) = f_1(0) = x_0$.
Si $a \neq b$, d'après la question I.2.(b), pour tout réel t, $f_1(t) = \varphi^{-1}\left((a-b)t + \varphi(x_0)\right)$ (ce qui reste vrai quand $a = b$).

(b) Pour tout réel t, $f(t) = \left(\varphi^{-1}\left((a-b)t + \varphi(x_0)\right), 1 - \varphi^{-1}\left((a-b)t + \varphi(x_0)\right)\right)$.

Si $a > b$, $\lim\limits_{t\to+\infty} (a-b)t + \varphi(x_0) = +\infty$ puis $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi^{-1}\left((a-b)t + \varphi(x_0)\right) = 1$. Dans ce cas, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = (1, 0)$.
Si $a < b$, $\lim\limits_{t\to+\infty} (a-b)t + \varphi(x_0) = -\infty$ puis $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi^{-1}\left((a-b)t + \varphi(x_0)\right) = 0$. Dans ce cas, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = (0, 1)$.
Si $a = b$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = (x_0, 1 - x_0)$.

5) (a) Pour tout réel t,

$$\begin{aligned}\langle e_1 - f(t), Af(t)\rangle &= a\left((1-f_1(t))\, f_1(t) - f_2(t) f_2(t)\right) = a\left((1-f_1(t))\, f_1(t) - (1-f_1(t))^2\right)\\ &= a\,(1-f_1(t))\,(2f_1(t)-1)\end{aligned}$$

et donc, pour tout réel t,

$$f_1'(t) = af_1(t)\,(1-f_1(t))\,(2f_1(t)-1)\,.$$

(b).i. La question II.2.b) appliquée aux fonctions $x = 1 - f_1$ et $h = -af_1\,(2f_1 - 1)$ montre que $1 - f_1$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$. Puisque $(1-f_1)\,(0) = 1 - x_0 > 0$, on a donc pour tout réel t, $1 - f_1(t) > 0$ puis $f_1(t) < 1$.
La question II.2.b) appliquée aux fonctions $x = 2f_1 - 1$ et $h = 2af_1\,(1 - f_1)$ montre que $2f_1 - 1$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$. Puisque $(2f_1 - 1)\,(0) = 2x_0 - 1 > 0$, on a donc pour tout réel t, $2f_1(t) - 1 > 0$ puis $f_1(t) > \dfrac{1}{2}$.

Finalement, pour tout réel t, $\dfrac{1}{2} < f_1(t) < 1$.

(b).ii. Puisque pour tout réel t, $f_1'(t) = af_1(t)\,(1-f_1(t))\,(2f_1(t)-1)$, on en déduit que pour tout réel t, $\text{sgn}(a)\,(f_1'(t)) = +$. La fonction f_1 est donc strictement monotone sur $\mathbb{R}$. D'autre part, la fonction f_1 est bornée. On en déduit que f_1 a une limite réelle ℓ quand t tend vers $+\infty$.

(b).iii. D'autre part, la fonction f_1' tend vers le réel $a\ell(1-\ell)(2\ell-1)$ quand t tend vers $+\infty$. D'après la question II.1, on doit avoir $a\ell(1-\ell)(2\ell-1) = 0$.

• Si $a > 0$, puisque pour tout réel t, $\dfrac{1}{2} < f_1(t) < 1$ et que f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\dfrac{1}{2} < \ell \leqslant 1$. Puisque $a\ell(1-\ell)(2\ell-1) = 0$, on en déduit que $\ell = 1$. Donc, si $a > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = (1, 0)$.

• Si $a < 0$, f_1 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell < 1$ et donc $\ell = \dfrac{1}{2}$ puisque $a\ell(1-\ell)(2\ell-1) = 0$. Donc, si $a < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

(c) La fonction f_2 vérifie de même : pour tout réel t, $f_2'(t) = af_2(t)\,(1-f_2(t))\,(2f_2(t)-1)$ et $f_2(0) = 1 - x_0 \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.
D'après la question précédente, si $a > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = (0, 1)$ et si $a < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Partie III. Inégalité de Pinsker

1) (a) La fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$ car sa dérivée seconde, à savoir la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$, est négative sur $]0, +\infty[$. Donc, pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et tout $(a, b) \in]0, +\infty[^2$, $\lambda \ln a + (1-\lambda) \ln b \leqslant \ln(\lambda a + (1-\lambda) b)$. Par suite, pour $(x, y) \in]0, 1[^2$,

$$\begin{aligned}K(x,y) &= x\ln x + (1-x)\ln(1-x) - (x\ln y + (1-x)\ln(1-y)) \geqslant x\ln x + (1-x)\ln(1-x) - \ln(xy + (1-x)(1-y))\\ &\geqslant x\ln x + (1-x)\ln(1-x) - \ln(1+1) = x\ln x + (1-x)\ln(1-x) - \ln 2.\end{aligned}$$

La fonction $\psi\ :\ x \mapsto x\ln x + (1-x)\ln(1-x) - \ln 2$ est continue sur $]0, 1[$ et se prolonge par continuité en 0 et en 1 (en posant $\psi(0) = \psi(1) = -\ln 2$). Son prolongement est alors une fonction continue sur le segment $[0, 1]$. On en déduit que la fonction $x \mapsto x\ln x + (1-x)\ln(1-x) - \ln 2$ est bornée sur $]0, 1[$ et en particulier, est minorée sur $]0, 1[$.

Ceci montre que la fonction K est minorée sur $]0, 1[^2$.

Pour tout $x \in]0, 1[$, $K(x, 1-x) = x\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right) + (1-x)\ln\left(\dfrac{1-x}{x}\right) = (2x-1)\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ puis $\lim\limits_{x\to1} K(x, 1-x) = +\infty$. On en déduit que la fonction K n'est pas majorée sur $]0, 1[^2$.

(b) Les fractions rationnelles $(x, y) \mapsto \dfrac{x}{y}$ et $(x, y) \mapsto \dfrac{1-x}{1-y}$ sont de classe C^1 sur $]0, 1[^2$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et la fonction ln est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Donc, les fonctions $(x, y) \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$ et $(x, y) \mapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{1-y}\right)$ sont de classe C^1 sur $]0, 1[^2$. Il en est de même de la fonction K puis, pour $(x, y) \in]0, 1[^2$,

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x,y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + 1 - \ln\left(\frac{1-x}{1-y}\right) - 1 = \ln\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$$

puis, pour $(x,y)\in]0,1[^2$, $K(x,y)=x\ln x-x\ln y+(1-x)\ln(1-x)-(1-x)\ln(1-y)$ et donc

$$\frac{\partial K}{\partial y}(x,y)=-\frac{x}{y}+\frac{1-x}{1-y}=\frac{-x(1-y)+y(1-x)}{y(1-y)}=\frac{y-x}{y(1-y)}.$$

(c) Soit $x\in]0,1[$ fixé. La fonction $\Psi\ :\ y\mapsto K(x,y)$ est dérivable sur $]0,1[$, de dérivée $\Psi'\ :\ y\mapsto\dfrac{y-x}{y(1-y)}$. La fonction Ψ' est strictement négative sur $]0,x[$ et strictement positive sur $]x,1[$. La fonction Ψ admet donc un minimum global strict sur $]0,1[$ égal à $\Psi(x)=x\ln\left(\dfrac{x}{x}\right)+(1-x)\ln\left(\dfrac{1-x}{1-x}\right)=0$.

Ainsi, $\forall(x,y)\in]0,1[^2$, $K(x,y)\geqslant 0$ avec égalité si et seulement $x=y$ ou encore, la fonction K admet sur $]0,1[^2$ un minimum égal à 0 et ce minimum est atteint en tous les (x,x), $x\in]0,1[$, et seulement en ces points.

(d) Soit $x\in]0,1[$ fixé. La fonction $L_x\ :\ y\mapsto K(x,y)-2(x-y)^2$ est dérivable sur $]0,1[$ et pour $y\in]0,1[$

$$\frac{L_x}{dx}(y)=\frac{y-x}{y(1-y)}-4(y-x)=\frac{y-x}{y(1-y)}(1-4y(1-y))\frac{(y-x)(2y-1)^2}{y(1-y)}.$$

Encore une fois, la fonction L_x admet un minimum en $y=x$ avec $L_x(x)=0$.

Donc, $\forall(x,y)\in]0,1[^2$, $K(x,y)-2(x-y)^2=L_x(y)\geqslant 0$ puis, $\forall(x,y)\in]0,1[^2$, $x\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)+(1-x)\ln\left(\dfrac{1-x}{1-y}\right)\geqslant 2(x-y)^2$.

2) (a) Puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}x_i=\sum_{i=1}^{p}y_i=1$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}|x_i-y_i|&=\sum_{i\in B_+}(x_i-y_i)+\sum_{i\in B_-}(y_i-x_i)=\sum_{i\in B_+}x_i-\sum_{i\in B_+}y_i+\left(1-\sum_{i\in B_+}y_i\right)-\left(1-\sum_{i\in B_+}x_i\right)\\&=2\left(x_{B_+}-y_{B_+}\right).\end{aligned}$$

(b) Si, par l'absurde, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, on a $x_i>y_i$, alors $1=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}x_i>\sum_{i=1}^{p}y_i=1$ ce qui est impossible. Donc, $B_-\neq\varnothing$.

Si $B_+=\varnothing$ alors, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $x_i\leqslant y_i$. Si de plus, par l'absurde, il existe $i_0\in[\![1,p]\!]$ tel que $x_{i_0}<y_{i_0}$, alors $1=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}x_i<\sum_{i=1}^{p}y_i=1$ ce qui est impossible.

En résumé, B_- est non vide et de plus, B_+ est vide si et seulement si pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $x_i=y_i$.

Si pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $x_i=y_i$ alors $x_{B_+}=0$, $y_{B_+}=0$ (erreur d'énoncé ?) et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}x_i\ln\left(\frac{x_i}{y_i}\right)=0$.

Sinon, B_+ et B_- sont non vides et dans ce cas, $0<x_{B_+}<\displaystyle\sum_{i=1}^{p}x_i=1$ et de même $y_{B_+}\in]0,1[$ puis

$$\sum_{i=1}^{p}x_i\ln\left(\frac{x_i}{y_i}\right)=\sum_{i\in B_+}x_i\ln\left(\frac{x_i}{y_i}\right)+\sum_{i\in B_-}x_i\ln\left(\frac{x_i}{y_i}\right)$$

Inachevé.

(c) Si pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $x_i=y_i$, alors l'inégalité à établir est immédiate. Sinon, $x_{B_+}\in]0,1[$ et $y_{B_+}\in]0,1[$ puis

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}x_i\ln\left(\frac{x_i}{y_i}\right)&\geqslant x_{B_+}\ln\left(\frac{x_{B_+}}{y_{B_+}}\right)+(1-x_{B_+})\ln\left(\frac{1-x_{B_+}}{1-y_{B_+}}\right)=K\left(x_{B^+},y_{B^+}\right)\\&\geqslant 2\left(x_{B_+}-y_{B_+}\right)^2\ \text{(d'après III.1.d)}\\&=2\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}|x_i-y_i|\right)^2\ \text{(d'après III.2.a)}\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p}|x_i-y_i|\right)^2.\end{aligned}$$

Partie IV. Convergence vers un point de coordonnées strictement positives

1) (a) Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_i'(t) = \langle e_i - f(t), Af(t)\rangle f_i(t)$$

et donc, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{p} f_i\right)'(t) &= \sum_{i=1}^{p} \langle e_i - f(t), Af(t)\rangle f_i(t) = \langle \sum_{i=1}^{p} f_i(t)e_i, Af(t)\rangle - \left(\sum_{i=1}^{p} f_i(t)\right)\langle f(t), Af(t)\rangle \\ &= \left(1 - \sum_{i=1}^{p} f_i(t)\right)\langle f(t), Af(t)\rangle\end{aligned}$$

puis

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{p} f_i\right)'(t) = -\langle f(t), Af(t)\rangle \left(1 - \sum_{i=1}^{p} f_i(t)\right).$$

Par suite, la fonction $x = 1 - \sum_{i=1}^{p} f_i$ vérifie $x' = hx$ où pour tout réel t, $h(t) = -\langle f(t), Af(t)\rangle$. Puisque $x(0) = 0$ et que h est continue sur $\mathbb{R}$, la question II.2.b permet d'affirmer que $x = 0$ et donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{p} f_i(t) = 1$.

(b) Pour $i \in [\![1, p]\!]$, soit $h_i : t \mapsto \langle e_i - f(t), Af(t)\rangle$. h_i est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $f_i' = h_i f_i$. De plus, $f_i(0) > 0$. D'après la question II.2.b, pour tout réel t, $f_i(t) > 0$. Puisque pour tout réel t, $\sum_{i=1}^{p} f_i(t) = 1$, on en déduit que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $f_i(t) \in]0, 1[$ (si $p \geqslant 2$). Donc, f est à valeurs dans Δ^0.

2) (a) Soit $x \in \Delta^0$. Puisque x^* est aussi dans Δ^0, d'après l'inégalité (7) de la question II.2.c,

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^* \ln\left(\frac{x_i^*}{x_i}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p} |x_i^* - x_i|\right)^2 \geqslant 0.$$

(b) De plus, si $x \neq x^*$, $Q(x) \geqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p} |x_i^* - x_i|\right)^2 > 0$ et d'autre part,

$$Q(x^*) = \sum_{i=1}^{p} x_i^* \ln\left(\frac{x_i^*}{x_i^*}\right) = 0.$$

(c) Soit $i \in [\![1, p]\!]$.

Si $x_i^* > x_i > 0$, $\ln\left(\frac{x_i^*}{x_i}\right) = \int_{x_i}^{x_i^*} \frac{dt}{t} \leqslant \int_{x_i}^{x_i^*} \frac{dt}{x_i} = \frac{1}{x_i}(x_i^* - x_i)$.

Si $0 < x_i^* \leqslant x_i$, $-\ln\left(\frac{x_i^*}{x_i}\right) = \int_{x_i^*}^{x_i} \frac{dt}{t} \geqslant \int_{x_i^*}^{x_i} \frac{dt}{x_i} = \frac{1}{x_i}(x_i - x_i^*)$ et encore une fois $\ln\left(\frac{x_i^*}{x_i}\right) \leqslant \frac{1}{x_i}(x_i^* - x_i)$.

Puisque chaque x_i^* est positif, on a dans tous les cas $x_i^* \ln\left(\frac{x_i^*}{x_i}\right) \leqslant \frac{x_i^*}{x_i}(x_i^* - x_i)$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$Q(x) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{x_i^*}{x_i}(x_i^* - x_i).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \frac{x_i^*}{x_i}(x_i^* - x_i) &\leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{x_i^*}{x_i}|x_i^* - x_i| \\
&\leqslant \frac{1}{\min\{x_1,\ldots,x_p\}} \sum_{i=1}^{p} x_i^* |x_i^* - x_i| \\
&\leqslant \frac{1}{\min\{x_1,\ldots,x_p\}} \left(\sum_{i=1}^{p} (x_i^*)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{p} (x_i^* - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&\leqslant \frac{1}{\min\{x_1,\ldots,x_p\}} \left(\sum_{i=1}^{p} x_i^*\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{p} (x_i^* - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (car pour tout } i \in [\![1,p]\!],\ x_i^* \in [0,1]) \\
&= \frac{1}{\min\{x_1,\ldots,x_p\}} \left(\sum_{i=1}^{p} (x_i^* - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall x \in \Delta^0,\ Q(x) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{x_i^*}{x_i}(x_i^* - x_i) \leqslant \frac{1}{\min\{x_1,\ldots,x_p\}} \left(\sum_{i=1}^{p} (x_i^* - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3) (a) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans Δ^0 (d'après la question IV.1) et Q est de classe C^1 sur Δ_0 à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc, $Q \circ f$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel t,

$$Q(f(t)) = \sum_{i=1}^{p} x_i^* \ln(x_i^*) - \sum_{i=1}^{p} x_i^* \ln(f_i(t))$$

et donc

$$\begin{aligned}
(Q \circ f)'(t) &= -\sum_{i=1}^{p} x_i^* \frac{f_i'(t)}{f_i(t)} = -\sum_{i=1}^{p} x_i^* \langle e_i - f(t), Af(t)\rangle \\
&= -\langle \sum_{i=1}^{p} x_i^* e_i, Af(t)\rangle + \left(\sum_{i=1}^{p} x_i^*\right)\langle f(t), Af(t)\rangle \\
&= -\langle x^*, Af(t)\rangle + \langle f(t), Af(t)\rangle = -\langle x^* - f(t), Af(t)\rangle.
\end{aligned}$$

(b) Par hypothèse, pour tout réel t, $\langle x^* - f(t), Af(t)\rangle \geqslant 0$ (puisque $f(t)$ est dans Δ^0) et donc pour tout réel t, $(Q \circ f)'(t) \leqslant 0$. La fonction $Q \circ f$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction $Q \circ f$ est minorée par 0 d'après la question IV.2.a. On en déduit que la fonction $Q \circ f$ a une limite en $+\infty$ qui est un réel ℓ positif ou nul.

4) (a) D'après la question IV.2.c, pour tout réel t,

$$0 \leqslant Q(f(t)) \leqslant \frac{1}{\min\{f_1(t),\ldots,f_p(t)\}} \left(\sum_{i=1}^{p} (f_i(t) - x_i^*)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

et donc, puisque la fonction $Q \circ f$ tend vers ℓ en décroissant,

$$\sum_{i=1}^{p} (f_i(t) - x_i^*)^2 \geqslant (\min\{f_1(t),\ldots,f_p(t)\})^2 (Q(f(t)))^2 \geqslant \varepsilon^2 \ell^2.$$

(b) • Soit $\alpha > 0$. Soit $B = B_o\left(x^*, \sqrt{\alpha}\right)$. Vérifions que $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B)$ est un compact de $\mathbb{R}^p$. Si $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B) = \varnothing$, c'est immédiat. On suppose dorénavant $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B) \neq \varnothing$.

B est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et donc $C_{\mathbb{R}^p}(B)$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$. D'autre part, l'application $\varphi\ :\ x \mapsto \sum_{i=1}^{p} x_i$ est continue sur $\mathbb{R}^p$ car linéaire (et $\dim \mathbb{R}^p < +\infty$). Donc, $\Delta = \varphi^{-1}\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$ en tant qu'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue. Finalement, $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B)$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$ en tant qu'intersection de fermé de $\mathbb{R}^p$.

Pour tout x de Δ, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} x_i = 1$ et donc Δ est une partie bornée de $\mathbb{R}^p$. Il en est de même de $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B)$.

Finalement, $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B)$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^p$. Puisque $\mathbb{R}^p$ est de dimension finie, le théorème de BOREL-LEBESGUE permet d'affirmer que $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B)$ est un compact de $\mathbb{R}^p$.

• Soit $\alpha > 0$. Si $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B) = \varnothing$, n'importe quel réel strictement positif β convient (puisque pour $x \in \Delta$, la proposition $\|x - x^*\|^2 \geqslant \alpha$ est toujours fausse).
Supposons dorénavant $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B) \neq \varnothing$. La fonction $\psi : x \mapsto \langle x^* - x, Ax\rangle$ est polynomiale en les composantes de x et est donc continue sur $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On en déduit que l'application ψ admet un minimum sur le compact $\Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B)$. Par suite, il existe $a \in \Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B)$ tel que pour tout $x \in \Delta \cap C_{\mathbb{R}^p}(B)$, $\langle x^* - x, Ax\rangle \geqslant \langle x^* - a, Aa\rangle$. Soit $\beta = \langle x^* - a, Aa\rangle$. Par construction, $a \neq x^*$ (car $\|a - x^*\|^2 \geqslant \alpha > 0$) et donc $\beta > 0$.

On a montré qu'il existe un réel $\beta > 0$ tel que : $\forall x \in \Delta,\ \left(\|x - x^*\|^2 \geqslant \alpha \Rightarrow \langle x^* - x, Ax\rangle \geqslant \beta\right)$.

(c) Pas trouvé.

(d) Pas trouvé.

5) (a) Pas trouvé.

(b) Pour tout réel t,

$$\begin{aligned}
(f_1f_2f_3)'(t) &= f_1'(t)f_2(t)f_3(t) + f_1(t)f_2'(t)f_3(t) + f_1(t)f_2(t)f_3'(t) \\
&= \left(\langle e_1 - f(t), Af(t)\rangle + \langle e_2 - f(t), Af(t)\rangle + \langle e_3 - f(t), Af(t)\rangle\right) f_1(t)f_2(t)f_3(t) \\
&= 3\langle \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) - f(t), Af(t)\rangle f_1(t)f_2(t)f_3(t) \\
&= 3\langle x^* - f(t), Af(t)\rangle f_1(t)f_2(t)f_3(t) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Donc, la fonction $f_1f_2f_3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

(c) Pas trouvé.

