Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2019

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont discrètes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$.

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x. On rappelle que l'indicatrice $\mathbf{1}_A$ d'un événement A est la variable aléatoire qui, à chaque $\omega \in \Omega$, associe $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ sinon.

On rappelle qu'une fonction réelle h, définie sur $\mathbb{R}$, est dite convexe si, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout réel $\lambda \in [0,1]$, on a : $h\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)$. Le candidat se rappellera, ou admettra, que si une fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ et convexe alors, pour tout réel a, la fonction $p_a : x \mapsto \dfrac{h(x)-h(a)}{x-a}$ est croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Partie I - Préliminaires

On établit ici des résultats qui seront utilisées dans la suite du problème. Les questions sont indépendantes.

1. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose, pour tout entier naturel , non nul $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

   (a) Quelle est, pour tout entier naturel n non nul, la loi de S_n ?

   (b) Prouver, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :
$$\mathbf{P}\Big(\frac{S_n}{n} \geqslant \lambda + \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}.$$

2. Soit $(x,\mu) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < \mu < x$.

   On considère l'application Ψ qui, à chaque réel $\theta \geqslant 0$, associe
$$\Psi(\theta) = \exp\Big(\mu(\mathrm{e}^{\theta} - 1) - \theta x\Big).$$

   (a) Montrer que la fonction Ψ a un minimum sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa valeur.

   (b) Soit $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $x = n(\lambda + \varepsilon)$ et $\mu = n\lambda$.
   Justifier, dans ces conditions, l'existence d'un réel $a > 0$ (fonction de λ et ε mais pas de n) pour lequel $\min\limits_{\theta\geqslant 0} \Psi(\theta) = \mathrm{e}^{-an}$.

3. Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g\big(\frac{x+y}{2}\big) \leqslant \frac{g(x)+g(y)}{2}$.

   (a) Prouver, pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout entier naturel n et pour tout entier $k \in [\![0, 2^n]\!]$, l'inégalité :
$$g\Big(\frac{k}{2^n}x + (1 - \frac{k}{2^n})y\Big) \leqslant \frac{k}{2^n}\, g(x) + \big(1 - \frac{k}{2^n}\big)\, g(y).$$
   On pourra raisonner par récurrence sur l'entier n, et observer que, si p est un entier, on a l'égalité : $\frac{2p + (2p+2)}{2} = 2p + 1$.

   (b) On pose $D = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \Big\{\frac{k}{2^n}\,;\, k \in [\![0, 2^n]\!]\Big\}$ et on considère un réel λ de $[0,1]$.

   On note, pour tout entier naturel n, $d_n = \frac{\lfloor \lambda 2^n \rfloor}{2^n}$.
   Vérifier que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de D, **croissante** et convergente vers λ.

   (c) On suppose, de plus, que la fonction g est croissante. Montrer qu'elle est convexe.

4. Soit X une variable aléatoire discrète possédant une espérance.

   (a) Rappeler l'inégalité de Markov.

(b) On suppose, de plus, la variable X à valeurs positives ou nulles. Établir, pour tout réel $x > 0$, l'inégalité

$$\mathbf{P}(X \geqslant x) \leqslant \inf_{\theta > 0} \frac{\mathbf{E}(e^{\theta X})}{e^{\theta x}}.$$

5. Soit X une variable aléatoire, **possédant une espérance** et telle que $X(\Omega) = \{x_k\,;\, k \in \mathbb{N}^*\}$ où la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, strictement croissante et de limite $+\infty$. On pose $x_0 = 0$. On note, pour tout entier naturel n, $\alpha_n = \mathbf{E}(X\,\mathbf{1}_{[X\leqslant x_n]})$.

(a) Prouver la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$.
Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a :

$$\mathbf{E}(X) - \varepsilon \leqslant \alpha_n.$$

En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{E}(X)$.

(c) Soit β la fonction qui, à chaque réel $K \geqslant 0$ associe, $\beta(K) = \mathbf{E}(X\,\mathbf{1}_{[X\leqslant K]})$.
Prouver l'égalité $\lim\limits_{K\to+\infty} \beta(K) = \mathbf{E}(X)$.
On admet que ce résultat est valable pour toute variable aléatoire discrète à valeurs positives ou nulles.

6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ concave et décroissante. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Justifier l'existence d'une limite finie, négative ou nulle, à droite en x, pour la fonction $u \mapsto \dfrac{f(u) - f(x)}{u - x}$. On note θ_0 cette limite.

(b) Prouver, pour tout réel u, l'inégalité : $f(u) \leqslant f(x) + \theta_0(u - x)$.

(c) En déduire l'égalité

$$\inf_{\theta \geqslant 0} \sup_{u\in\mathbb{R}} \Big(f(u) + \theta(u - x) \Big) = f(x),$$

en ayant, pour tout réel θ, posé $\sup\limits_{u\in\mathbb{R}} \Big(f(u) + \theta(u - x) \Big) = +\infty$ quand la fonction $u \mapsto f(u) + \theta(u - x)$ n'est pas majorée.

7. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_k\,;\, k \in \mathbb{N}^*\}$ où la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, strictement croissante et de limite $+\infty$. On pose $x_0 = 0$.

(a) Vérifier que la fonction qui à chaque réel t associe $\mathbf{P}(X > t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit r un entier naturel.
Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{x_{r+1}} \mathbf{P}(X > t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{r} (x_{k+1} - x_k)\mathbf{P}(X > x_k)$, puis l'égalité

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbf{P}(X > t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{r} x_k\,\mathbf{P}(X = x_k) + x_{r+1}\,\mathbf{P}(X > x_r).$$

(c) Prouver que la variable aléatoire X a une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$ converge et que, dans ce cas, on a l'égalité :

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(X > t)\,\mathrm{d}t.$$

On admet que ce résultat s'étend à toute variable aléatoire discrète à valeurs positives ou nulles.

8. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$ vérifiant, pour tout $(m,n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$, l'inégalité :
$$v_{m+n} \leqslant v_m + v_n.$$
   (a) Justifier l'existence du nombre $\rho = \inf\left\{\frac{v_n}{n}\,;\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

   (b) Soit $\varepsilon>0$ et $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\rho \leqslant \frac{v_N}{N} < \rho+\varepsilon$.
   Soit $(k,r)\in\mathbb{N}\times[\![0,N-1]\!]$ et $n=kN+r$. Prouver l'inégalité $\frac{v_n}{n}\leqslant\frac{v_N}{N}+\frac{v_r}{n}$ et en déduire, pour tout entier n assez grand, l'encadrement $\rho\leqslant\frac{v_n}{n}\leqslant\rho+2\varepsilon$.
   On en déduit ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{n}=\rho$.

Dans toute la suite du problème, on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes, à valeurs **positives ou nulles**, indépendantes et suivant toutes la loi de X_1. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$.

On suppose, de plus, que, pour tout réel t, $\mathbf{P}(X_1>t)>0$.

9. (a) Soit $(m,n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$ et $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. Établir l'inégalité :
$$\mathbf{P}(S_{m+n}\geqslant mu+nv)\geqslant\mathbf{P}(S_m\geqslant mu)\,\mathbf{P}(S_n\geqslant nv).$$
   (b) Prouver, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel u, l'inégalité :
$$\mathbf{P}(S_n\geqslant nu)>0.$$
   (c) En déduire que, pour tout réel u, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\mathbf{P}(S_n\geqslant nu)}{n}=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\ln\mathbf{P}(S_n\geqslant nu)}{n}$.

Partie II - Le théorème de Cramer

1. `Une inégalité`

   (a) Soit J une partie de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout élément x de J, l'intervalle $]-\infty,x]$ est inclus dans J. Prouver que la partie J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

   (b) Vérifier que la fonction $\varphi:\theta\mapsto\ln\mathbf{E}(\mathrm{e}^{\theta X_1})$ est définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{R}_-$.

   (c) Déterminer l'intervalle I et la valeur de $\varphi(\theta)$ pour tout $\theta\in I$, dans les cas où X_1 suit la loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$ ou la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.

2. (a) Vérifier que la fonction $H:u\mapsto\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}\ln\big(\mathbf{P}(S_n\geqslant nu)\big)$ est définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est décroissante.

   (b) Prouver, pour tout couple $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, l'inégalité : $H\Big(\frac{u+v}{2}\Big)\geqslant\frac{1}{2}\big(H(u)+H(v)\big)$.
   On utilisera **I** - 9.

(c) Qu'en déduit-on pour la fonction H?

3. Soit $\theta \in I \cap \mathbb{R}_+$.

(a) Justifier, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\mathbf{E}(e^{\theta S_n}) = \Big(\mathbf{E}(e^{\theta X_1})\Big)^n$.

(b) En déduire, pour tout réel u et pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\varphi(\theta) \geqslant \frac{1}{n}\ln\Big(e^{n\theta u}\,\mathbf{P}(S_n \geqslant nu)\Big).$$

(c) Conclure à l'inégalité :

$$\varphi(\theta) \geqslant \sup_{u\in\mathbb{R}}\big(\theta u + H(u)\big).$$

4. `Le cas d'égalité si` $\theta = 0$

Établir l'égalité : $\varphi(0) = \sup\limits_{u\in\mathbb{R}} H(u)$.

5. `L'autre inégalité si` $\theta > 0$

On rappelle que les variables X_k sont discrètes, à valeurs positives ou nulles, indépendantes et suivent toutes la loi de X_1, et que, pour tout réel t, $\mathbf{P}(X_1 > t) > 0$.

Soit $K > 0$, $\theta > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) i. Prouver l'inégalité :

$$\ln\Big(\mathbf{E}(e^{\theta X_1}\,\mathbf{1}_{[X_1\leqslant K]})\Big) = \frac{1}{n}\ln\Big(\mathbf{E}(e^{\theta S_n}\prod_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{[X_i\leqslant K]})\Big).$$

ii. En déduire l'inégalité :

$$\ln\Big(\mathbf{E}(e^{\theta X_1}\,\mathbf{1}_{[X_1\leqslant K]})\Big) \leqslant \frac{1}{n}\ln\Big(\mathbf{E}(e^{\theta S_n}\,\mathbf{1}_{[S_n\leqslant nK]})\Big).$$

(b) Justifier l'existence d'une espérance pour la variable $e^{\theta S_n}\,\mathbf{1}_{[S_n\leqslant nK]}$ et établir l'inégalité :

$$\mathbf{E}(e^{\theta S_n}\,\mathbf{1}_{[S_n\leqslant nK]}) \leqslant \int_0^{\exp(n\theta K)} \mathbf{P}(e^{\theta S_n} > t)\,\mathrm{d}t.$$

(c) En déduire l'inégalité $\mathbf{E}(e^{\theta S_n}\,\mathbf{1}_{[S_n\leqslant nK]}) \leqslant 1 + n\theta\displaystyle\int_0^K \mathbf{P}(S_n > nu)\,e^{n\theta u}\,\mathrm{d}u$, puis l'inégalité :

$$\ln\Big(\mathbf{E}(e^{\theta X_1}\,\mathbf{1}_{[X_1\leqslant K]})\Big) \leqslant \frac{1}{n}\ln\Big(1 + n\theta K\exp(nM(\theta))\Big),$$

où l'on a posé $M(\theta) = \sup\limits_{u\in\mathbb{R}}\big(\theta u + H(u)\big)$.

6. Prouver, pour tout réel K assez grand et pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\ln\Big(\mathbf{E}(e^{\theta X_1}\,\mathbf{1}_{[X_1\leqslant K]})\Big) \leqslant \frac{\ln(2n\theta K)}{n} + M(\theta).$$

7. En déduire l'inégalité : $\varphi(\theta) \leqslant M(\theta)$.

Il y a donc égalité via 3 - (c).

8. Conclure, pour tout réel x, à l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n \geqslant nx) = \inf_{\theta\geqslant 0} \Big(\ln \mathbf{E}(\mathrm{e}^{\theta X_1}) - \theta x \Big).$$

9. Soit $\lambda > 0$ et $\varepsilon > 0$.

   (a) Justifier l'existence d'un réel $a > 0$ pour lequel, pour tout entier naturel n assez grand, on a :
   $$\mathbf{P}\Big(\frac{S_n}{n} \geqslant \lambda + \varepsilon \Big) \leqslant \mathrm{e}^{-an}.$$

   (b) Retrouver ce résultat, en utilisant les résultats des questions **I** - 2 et **I** - 4, dans le cas particulier où X_1 suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2019

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

L'objet du problème est l'étude de quelques fonctions périodiques, bâties à partir de la distance à une partie de $\mathbb{R}$ et utilisées notamment en théorie du signal et en théorie des probabilités.

- Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on note $-A$ l'ensemble des opposés des éléments de A :

$$-A = \{-a\,;\, a \in A\}\ .$$

- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout réel strictement positif t, on dit que la fonction f est t-*périodique* si elle vérifie :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+t) = f(x)\ .$$

On dit que f est périodique s'il existe un réel strictement positif t pour lequel la fonction f est t-périodique. Dans ce cas, on appelle *période* de f la borne inférieure de l'ensemble des réels strictement positifs t pour lesquels la fonction f est t-périodique.

Par exemple, la fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ est périodique, de période égale à 1, et toute fonction constante est périodique, de période égale à 0.

Les quatre parties du problème sont largement indépendantes, mais les matrices introduites dans la partie I sont utilisées dans la partie IV.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie I : une famille de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on note T_c la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par :

$$T_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} .$$

On considère d'autre part la matrice : $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a) Pour quelles valeurs de c la matrice T_c est-elle diagonalisable ?

   b) Existe-t-il une valeur de c et une matrice inversible P pour lesquelles les deux matrices $P^{-1}T_cP$ et $P^{-1}SP$ sont diagonales ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Calculer la matrice $(T_{1/2})^n$.

   b) En déduire, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, la matrice $S^m\,(T_{1/2})^n$.

   c) Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on note $\mathscr{G}$ le plus petit sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ stable par le produit matriciel et contenant les matrices S et $T_{1/2}$.

   Justifier que toutes les matrices de $\mathscr{G}$ sont de la forme $2^{-n}\begin{pmatrix} 2^n & h & k \\ 0 & (-1)^m & \ell \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $(h,k,\ell) \in \mathbb{Z}^3$ et $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

   d) Quelles sont les matrices de $\mathscr{G}$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à $+1$ ou à -1 ?

Partie II : distances à une partie de $\mathbb{R}$

3. a) Justifier, pour tout réel x et pour toute partie non vide A de $\mathbb{R}$, l'existence de la distance de x à A, c'est-à-dire du nombre réel positif ou nul

$$\mathrm{d}(x,A) = \mathrm{Inf}\{|x-a|\,;\, a \in A\} .$$

   b) Quels sont les nombres réels x pour lesquels la distance $\mathrm{d}(x,A)$ de x à une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est nulle ?

   c) Justifier que, si A est une partie fermée de $\mathbb{R}$, alors il existe pour tout réel x un élément a_x de A tel que :

$$|x-a_x| = \mathrm{d}(x,A) .$$

4. Pour toute partie non vide A de $\mathbb{R}$, on note d_A la fonction $x \longmapsto \mathrm{d}(x,A)$, définie sur $\mathbb{R}$.

   a) Dessiner le graphe de la fonction d_A lorsque $A = \{-1,0,+1\}$.

   b) Démontrer que si $A = -A$, alors la fonction d_A est paire et que la réciproque est vraie lorsque A est fermée.

   c) Démontrer que, si l'ensemble A est minoré ou majoré, alors la fonction d_A n'est pas bornée.

   d) Donner un exemple d'ensemble A qui n'est ni minoré ni majoré, pour lequel la fonction d_A n'est pas bornée.

5. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que, pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et tout $\varepsilon>0$, on a :

$$\mathrm{d}_A(y) \le \mathrm{d}_A(x) + |y-x| + \varepsilon\ .$$

b) En déduire que la fonction d_A est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Justifier que, si la fonction d_A est dérivable et nulle en un point x_0, alors sa dérivée en ce point est nécessairement nulle.

6. On considère dans cette question une suite strictement décroissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, convergente et de limite nulle, et on note :

$$A = \mathbb{R}_-^* \cup \{u_n\,;\, n\in\mathbb{N}^*\}\ .$$

a) Justifier que 0 appartient à la frontière de A et que la fonction d_A s'annule en 0.

b) On considère ici le cas où $u_n = \dfrac{1}{n!}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Calculer $\mathrm{d}_A\big(\frac{1}{2}\,(u_n+u_{n+1})\big)$ et en déduire que la fonction d_A n'est pas dérivable à droite au point 0.

c) On considère maintenant le cas où $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Démontrer que la fonction d_A est dérivable au point 0 et indiquer les autres points où elle est dérivable.

Partie III : signaux triangulaires

7. Dans cette question, on suppose que A est un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R},+)$.

a) Donner la fonction d_A lorsque $A=\{0\}$ et lorsque A est dense dans $\mathbb{R}$.

b) Démontrer que, dans tous les autres cas, il existe un réel strictement positif α tel que :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{d}_A(x) = \alpha\, \mathrm{d}_{\mathbb{Z}}\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)\ .$$

On note désormais σ la fonction $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}$:

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad \sigma(x) = \mathrm{Min}\{|x-n|\,;\, n\in\mathbb{Z}\} \tag{1}$$

8. a) Justifier l'expression de $\mathrm{d}_{\mathbb{Z}}(x)$ donnée par (1).

b) Vérifier que la fonction σ est paire, périodique et de période égale à 1.

c) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1/2}^{+1/2} \sigma(t)\,\mathrm{d}t$.

d) Démontrer que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_{-1/2}^{+1/2} \sigma(t)\cos(2\pi n t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} -\dfrac{1}{n^2\pi^2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Pour tout $r \in]0,1[$, on note P_r l'application $t \longmapsto \dfrac{1-r^2}{1-2\,r\cos(2\pi t)+r^2}$.

9. a) Vérifier que, pour tout $r \in [0,1[$, la fonction P_r est définie, périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

   b) Soit $\varepsilon \in]0,1/2[$. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+1/2} P_r(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand r tend vers 1 par valeurs inférieures.

10. Soit $t \in \mathbb{R}$.

    a) Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\big(\cos(2\pi n t)\big)x^n$ est égal à 1.

    b) Établir, pour tout $r \in [0,1[$, l'égalité

$$P_r(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\cos(2\pi n t)\big)r^n\ .$$

11. Soit $x \in \mathbb{R}$.

    Pour tout $r \in [0,1]$, on pose : $\quad \sigma_r(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos\big((2k+1)\,2\pi\,x\big)}{(2k+1)^2}\,r^{2k+1}$.

    a) En utilisant les formules démontrées en 8c et 8d, démontrer que :

$$\forall\, r \in [0,1[,\quad \sigma_r(x) = \int_{-1/2}^{+1/2}\sigma(t)\Big(1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(2\pi n x)\cos(2\pi n t)r^n\Big)\,\mathrm{d}t\ .$$

    b) En déduire, pour tout $r \in [0,1[$, les égalités :

$$\sigma_r(x) = \frac{1}{2}\Big(\int_{-1/2}^{+1/2}\sigma(t)P_r(x+t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1/2}^{+1/2}\sigma(t)P_r(x-t)\,\mathrm{d}t\Big) = \int_{-1/2}^{+1/2}\sigma(x+t)P_r(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

12. Déduire de ce qui précède que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sigma(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos\big((2n+1)\,2\pi\,x\big)}{(2n+1)^2}\ .$$

Partie IV : une famille de fonctions 1-périodiques

Pour tout réel $c \in]0,1[$, on note τ_c l'application

$$\tau_c : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c^n \sigma(2^n x) \tag{2}$$

où σ est la fonction définie par (1) dans la partie III.

13. Soit $c \in]0,1[$.

 a) Justifier que la fonction τ_c est définie, continue et 1-périodique sur $\mathbb{R}$.

 b) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\tau_c(x) = \sigma(x) + c\,\tau_c(2x)$.

 c) Démontrer que τ_c est l'unique fonction τ définie et bornée sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \tau(x) = \sigma(x) + c\,\tau(2x) \tag{3}$$

14. Dans cette question, on suppose que c est égal à $1/4$.

 a) Démontrer que, pour tout $x \in [0,1/2]$, on a : $\tau_c(x) = 2x(1-x)$.

 b) Donner une représentation graphique de la fonction τ_c.

On note désormais β la fonction $\tau_{1/2}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \beta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \sigma(2^n x) \tag{4}$$

15. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On note f_1, f_2, f_3 les restrictions à $[0,1]$ des trois fonctions $x \longmapsto 1$, $x \longmapsto x$, $x \longmapsto \beta(x)$, respectivement, et F le sous-espace vectoriel de E engendré par ces trois fonctions.
On note Φ et Ψ les deux applications définies sur E par :

$$\forall\, f \in E, \quad \forall\, x \in [0,1], \quad \begin{cases} \Phi(f)(x) = f(x/2) \\ \Psi(f)(x) = f(1-x) \end{cases} .$$

 a) Vérifier que le sous-espace vectoriel F est stable par les endomorphismes Φ et Ψ.

 b) Vérifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de F et reconnaître les matrices dans cette base des endomorphismes de F induits par Φ et Ψ.

 c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 2^n]$.
En utilisant le résultat de la question 2b de la partie I, exprimer $\beta\big((1-x)\,2^{-n}\big)$ à l'aide de x, n et $\beta(x)$.

16. a) En exploitant le résultat trouvé en 15 c, justifier que la fonction β n'est pas dérivable en 0.

 b) Démontrer qu'il n'existe aucun intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction β est dérivable.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2019

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h

Le sujet se compose d'un exercice et d'un problème dont les différentes parties peuvent, dans une certaine mesure, être traitées de manière indépendante, quitte à admettre les résultats des parties précédentes. La qualité de la rédaction et la précision des réponses apportées entrent pour une part importante dans la notation. Chaque réponse doit être suffisamment justifiée. Les réponses absurdes sont pénalisées.

Problème

On considère un entier $n \geq 2$, une succession de $n+1$ dates $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, et un titre financier dont les valeurs successives (en €) lors des dates $t_0, \ldots, t_n$ sont respectivement notées $S_0, \ldots, S_n$.

On suppose que, sur chaque intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}[$ (où $0 \leq i \leq n-1$), un individu détient à la fois une certaine somme c_i (en €) déposée sur un compte bancaire, et une certaine quantité d_i du titre financier. A chaque date intermédiaire t_i, l'individu a la possibilité de modifier la répartition de ses avoirs entre compte bancaire et titre financier, et l'on suppose qu'il n'y a ni retrait ni apport de fonds lors d'une telle modification, si bien que l'on on a, pour tout $0 \leq i \leq n-2$, la relation :

$$c_i + d_i S_{i+1} = c_{i+1} + d_{i+1} S_{i+1}. \tag{1}$$

On suppose en outre que toutes les valeurs $c_i \in \mathbb{R}$ et $d_i \in \mathbb{R}$ sont possibles (y compris des valeurs négatives pour c_i et d_i, qui correspondent concrètement au cas où l'individu a emprunté une somme en € ou une certaine quantité de titres). On notera R_i l'avoir total de l'individu (en €) à la date t_i, soit $R_0 = c_0 + d_0 S_0$ et, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$R_i = c_{i-1} + d_{i-1} S_i. \tag{2}$$

Pour décrire l'évolution de la valeur du titre au cours du temps, on introduit une suite de variables aléatoires $W_1, \ldots, W_n$, mutuellement indépendantes, et possédant toutes la même loi de probabilité donnée par :

$$\mathbb{P}(W_i = h) = p,\ \mathbb{P}(W_i = b) = 1 - p,$$

h, b et p étant des nombres réels fixés vérifiant les conditions $0 < b < 1 < h$ et $0 < p < 1$. On suppose que $S_0 \equiv 1$ €, et l'on modélise l'évolution de la valeur du titre au cours du temps en supposant que celle-ci obéit, pour tout $1 \leq i \leq n$, à la relation :

$$S_i = W_i \cdot S_{i-1}.$$

Partie I – Quelques calculs préliminaires

1) Exprimer S_n en fonction des variables aléatoires $W_1, \ldots, W_n$.
2) Exprimer la valeur de l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n, p, b, h.
3) Exprimer la valeur de la variance $\mathbb{V}(S_n)$ en fonction de n, p, b, h.
4) On considère une fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions $c_f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $d_f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, telles que, pour tout $s \in]0, +\infty[$, le système d'équations suivant est satisfait :

$$\begin{cases} c_f(s) + s \cdot h \cdot d_f(s) = f(h \cdot s) \\ c_f(s) + s \cdot b \cdot d_f(s) = f(b \cdot s) \end{cases}$$

Une expression explicite des fonctions c_f et d_f à l'aide de f, h et b est demandée.
5) Montrer que, avec les notations de la question 4), on a, pour tout s :

$$c_f(s) + s \cdot d_f(s) = \left(\frac{1-b}{h-b}\right) \cdot f(hs) + \left(\frac{h-1}{h-b}\right) \cdot f(bs).$$

Partie II – Réplication avec horizon fixe

Dans toute cette partie, on considère une fonction $g\ :\ ]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *fixée.*

6) On suppose que, à la date t_{n-1}, on dispose de $c_{n-1} = c_g(S_{n-1})$ € sur le compte bancaire, et d'une quantité $d_{n-1} = d_g(S_{n-1})$ du titre financier (les fonctions c_g et d_g sont celles définies à la question 4) pour $f = g$). Montrer que, à la date t_n, la richesse totale de l'individu vérifie nécessairement $R_n = g(S_n)$. (On prêtera bien attention au fait que, ici, S_{n-1} et S_n sont des variables aléatoires.)
7) On définit récursivement les fonctions $f_0,\ldots,f_n\ :\ ]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ de la manière suivante : on pose d'abord $f_n = g$, puis, pour $0 \le i \le n-1$,

$$f_i(s) = c_{f_{i+1}}(s) + s d_{f_{i+1}}(s). \tag{3}$$

On suppose que, à la date t_0, l'individu dispose d'un avoir initial de $f_0(S_0)$ €, soit $R_0 = f_0(S_0)$. Montrer que, en répartissant son avoir de manière appropriée à chaque nouvelle date, il lui est possible de maintenir la validité de la relation $R_i = f_i(S_i)$ pour tout $1 \le i \le n$.
Indication : Pour commencer, l'individu répartit son avoir initial en $c_0 = c_{f_1}(S_0)$ € sur le compte bancaire et une quantité $d_0 = d_{f_1}(S_0)$ du titre financier.
8) **Application :** Alice souhaiterait (pour des raisons qui lui sont propres) pouvoir disposer d'une somme de $g(S_n)$ € à la date t_n, en échange d'un versement initial à la date t_0, sans avoir à s'occuper d'opérations intermédiaires de gestion entre ces deux dates. Son ami Barnabé s'engage alors à lui fournir la somme de $g(S_n)$ € à la date t_n en échange du versement de v_0 € à la date t_0. En utilisant les résultats des questions précédentes, expliquer comment, en fixant $v_0 = f_0(S_0)$, Barnabé parviendra à fournir à Alice la somme de $g(S_n)$ € à la date t_n, sans gain ni perte pour lui.

On introduit maintenant une probabilité $\mathbb{Q}$ *distincte (en général) de la probabilité de référence* $\mathbb{P}$ *considérée jusqu'ici, et l'on suppose que, sous la probabilité* $\mathbb{Q}$*, les variables aléatoires* $W_1,\ldots,W_n$ *sont mutuellement indépendantes et possèdent toutes la même loi de probabilité donnée par :*

$$\mathbb{Q}(W_i = h) = \frac{1-b}{h-b},\ \mathbb{Q}(W_i = b) = \frac{h-1}{h-b}.$$

L'espérance calculée par rapport à la probabilité $\mathbb{Q}$ *sera notée* $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ *dans la suite, pour la distinguer de l'espérance* $\mathbb{E}$ *calculée par rapport à la probabilité* $\mathbb{P}$.
9) Vérifier que les valeurs de $\mathbb{Q}(W_i = h)$ et $\mathbb{Q}(W_i = b)$ données ci-dessus constituent une spécification correcte de la loi de probabilité d'une variable aléatoire ne prenant que les deux valeurs h et b.
10) Pour tout $0 \le i \le n-1$, on définit la fonction $\phi_i\ :\ ]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ par la formule :

$$\phi_i(s) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[g\left(s\cdot W_{i+1}\cdots W_n\right)\right], \tag{4}$$

et l'on pose en outre $\phi_n = g$. Montrer que, pour tout $1 \le i \le n-1$, on a la relation :

$$\phi_i(s) = \left(\frac{1-b}{h-b}\right)\phi_{i+1}(sh) + \left(\frac{h-1}{h-b}\right)\phi_{i+1}(sb).$$

Indication : utiliser une décomposition selon les différentes valeurs possibles de W_{i+1}.
11) Déduire de ce qui précède que, pour tout $0 \le i \le n$, on a $\phi_i = f_i$.
Indication : relire la question 5).

12) En déduire la relation (importante!) $f_0(S_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(g(S_n))$.
13) On introduit la variable aléatoire B définie comme le nombre d'indices $i \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $W_i = h$.

(a) Quelle est la loi de B (par rapport à la probabilité $\mathbb{Q}$) ?

(b) Exprimer S_n comme une fonction de B et de h, b, n.

(c) En déduire une formule explicite (sous forme d'une somme) pour $f_0(S_0)$ en fonction de h, b, n et g.

14) Montrer l'identité :

$$f_0(S_0) = \mathbb{E}\left[g(S_n) \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^B \left(\frac{1-b}{h-b}\right)^B \left(\frac{1}{1-p}\right)^{n-B} \left(\frac{h-1}{h-b}\right)^{n-B}\right].$$

15) Commenter le fait que les raisonnements précédents conduisent à choisir $v_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(g(S_n))$ et non pas $v_0 = \mathbb{E}(g(S_n))$, ou encore une valeur de v_0 caractérisée (par exemple) par une condition du type $\mathbb{P}(g(S_n) > v_0) \leq \epsilon$ pour une « petite » valeur de ϵ.

Partie III – Réplication avec horizon variable

Alice souhaite conclure un accord différent de celui étudié à la question 8), qui lui permettrait de choisir à tout moment la date à laquelle elle recevrait le versement de Barnabé. En échange d'un montant initial de z_0 € à la date t_0, Alice pourrait donc décider à la date t_k de demander à Barnabé de lui verser la somme de $g(S_k)$ € (Alice ne pouvant exiger qu'une seule fois le versement, parmi l'ensemble des dates possibles.)

16) A priori, la valeur de z_0 devrait-elle être supérieure, égale, ou inférieure à la valeur v_0 considérée à la question 8) ? (Justifier la réponse.)

On définit récursivement les fonctions $\psi_0, \ldots, \psi_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *de la manière suivante : on pose d'abord* $\psi_n = g$*, puis, pour* $0 \leq i \leq n-1$,

$$\psi_i(s) = \max\left(g(s), c_{\psi_{i+1}}(s) + s d_{\psi_{i+1}}(s)\right). \tag{5}$$

17) Expliquer comment, en fixant $z_0 = \psi_0(S_0)$, Barnabé parviendra à disposer à toute date t_k d'une somme au moins égale à $g(S_k)$ € jusqu'à ce qu'Alice en fasse la demande.
18) Expliquer pourquoi, si Alice demande à Barnabé le versement de $g(S_k)$ € à une date t_k pour laquelle on a $g(S_k) < \psi_k(S_k)$, Barnabé dégagera un profit de cette opération. Pour Alice, quelle pourrait-être la meilleure date à laquelle demander le versement?

Partie IV – Un petit contre-exemple

Dans cette partie, on considère simplement deux dates t_0 et t_1, et l'on suppose que W_1 peut prendre trois valeurs distinctes : $\mathbb{P}(W_1 = 0,5) = 0,2$; $\mathbb{P}(W_1 = 1) = 0,6$; $\mathbb{P}(W_1 = 2) = 0,2$, tandis que la fonction g vérifie $g(0,5) = 1$; $g(1) = 2$; $g(2) = 3$.
19) Vérifier qu'il n'existe pas de couple de nombres réels c, d tels que $\mathbb{P}(c + dS_1 = g(S_1)) = 1$.
20) Un accord entre Alice et Barnabé du type de celui considéré à la question 8) est-il possible ici? (Justifier la réponse.)

Exercice

Dans cet exercice, on considère un nombre entier $N \geq 1$, et N variables aléatoires $U_1, \ldots, U_N$, supposées **mutuellement indépendantes, et suivant chacune la loi uniforme sur** $]0,1[$. On rappelle que la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$ est caractérisée par la fonction de densité f_U définie sur $\mathbb{R}$ par $f_U(u) = 1$ pour $u \in]0,1[$, et $f_U(u) = 0$ pour $u \notin]0,1[$.

On définit ensuite les variables aléatoires $U_{(1)}, \ldots, U_{(N)}$ obtenues en **triant par ordre croissant** les valeurs prises par les variables aléatoires [1] $U_1, \ldots, U_N$.

Par exemple, avec $N = 4$, si les valeurs effectivement réalisées des variables aléatoires U_1, U_2, U_3, U_4 se trouvent être :

$$U_1(\omega) = 0,44;\ U_2(\omega) = 0,72;\ U_3(\omega) = 0,23;\ U_4(\omega) = 0,44,$$

on aura :

$$U_{(1)}(\omega) = 0,23;\ U_{(2)}(\omega) = 0,44;\ U_{(3)}(\omega) = 0,44;\ U_{(4)}(\omega) = 0,72.$$

L'objectif de cet exercice est de caractériser la loi de probabilité de la variable $U_{(m)}$, pour chaque $m \in \{1, \ldots, N\}$.

A) Calculer la valeur de $\mathbb{E}(U_m)$ pour $1 \leq m \leq N$.

B) Etant donné $x \in [0,1]$, on appelle $N(x)$ la variable aléatoire définie comme le nombre d'indices $i \in \{1, \ldots, N\}$ tels que $U_i \leq x$. Montrer que, pour tout entier $m \in \{1, \ldots, N\}$, et tout $x \in [0,1]$, la réalisation de l'événement $U_{(m)} \leq x$ est équivalente à la réalisation de l'événement $N(x) \geq m$, et en déduire l'identité :

$$\mathbb{P}(U_{(m)} \leq x) = \mathbb{P}(N(x) \geq m).$$

C) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, la variable aléatoire $N(x)$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(N,p)$ avec $p = x$, et en déduire que, pour tout $m \in \{1, \ldots, N\}$,

$$\mathbb{P}(U_{(m)} \leq x) = \sum_{k=m}^{N} \binom{N}{k} x^k (1-x)^{N-k}.$$

D) En déduire que, pour tout $m \in \{1, \ldots, N\}$, la loi de la variable aléatoire $U_{(m)}$ possède une densité $f_{m,N}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{m,N}(x) = \begin{cases} \frac{N!}{(m-1)!(N-m)!} x^{m-1}(1-x)^{N-m} & \text{pour } x \in]0,1[\\ 0 & \text{pour } x \notin]0,1[\end{cases}.$$

E) A l'aide d'une intégration par parties, montrer l'identité :

$$\int_0^1 x f_{m,N}(x)dx = \frac{m}{N-m+1}\left(\int_0^1 f_{m,N}(x)dx - \int_0^1 x f_{m,N}(x)dx\right).$$

F) En déduire que, pour tout $m \in \{1, \ldots, N\}$:

$$\mathbb{E}\left(U_{(m)}\right) = \frac{m}{N+1}.$$

G) Commenter la différence entre les valeurs de $\mathbb{E}(U_m)$ et $\mathbb{E}(U_{(m)})$.

1. De manière plus formelle, pour tout $\omega \in \Omega$, les valeurs $U_{(1)}(\omega), \ldots, U_{(N)}(\omega)$ sont obtenues en triant dans l'ordre croissant les valeurs $U_1(\omega), \ldots, U_N(\omega)$, une valeur apparaissant plusieurs fois étant alors répétée avec sa multiplicité.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2019

Épreuve de français

Durée : 2h

Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas, c'est-à-dire, le plus grand,* comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé. Le candidat doit indiquer sur sa copie les tranches de 50 mots ainsi que le nombre total de mots utilisés.

C'est une petite musique qui enfle. Un refrain fredonné sans tabou, de plus en plus haut, de plus en plus fort, et de toutes parts. Et si les Lumières étaient has been ? Si les idéaux de progrès, de raison et d'universel, qui élèvent la connaissance et le savoir au-delà des croyances, étaient passés de mode, périmés, voire néfastes ? Livres, discours, manifestes, la remise en cause de cet esprit qui a irrigué le XVIII[e] siècle autour des figures totémiques de Voltaire, de Rousseau, de Kant et de l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert, ce mouvement fondateur de la modernité politique européenne et matrice intellectuelle de la Révolution française, s'affiche aujourd'hui sans fard. (...)

Retour du religieux et des philosophies antirationalistes, repli sur le national et les communautés, avènement des vérités relatives et alternatives – les fameuses « fake news »... Jamais contexte n'a semblé plus défavorable à la pensée des Lumières. Les philosophes du XVIII[e] siècle incarnaient l'espoir d'une émancipation politique hors du carcan de la monarchie absolue de droit divin ; les démocraties libérales semblent désormais mortelles. Ils défendaient l'idéal d'une Europe des lettres transcendant les frontières ; à la veille des élections européennes de mai 2019, les populismes gagnent l'Europe entière, de l'Italie à la Hongrie en passant par la Scandinavie. (...)

L'idée de progrès est la première cible de cette attaque. Une méfiance croissante pèse aujourd'hui sur les sciences et la technique. Prise de conscience de la vulnérabilité de la planète et inquiétudes légitimes d'une apocalypse climatique, craintes de l'avènement d'une « humanité augmentée » à l'heure de l'intelligence artificielle, tout sujet scientifique est désormais interrogé avec inquiétude. Autant d'angoisses sur lesquelles surfe un nouveau courant écologiste ultraconservateur adepte de la « décroissance », incarné notamment par la jeune revue *Limite*.

Plus grave, la contestation des Lumières s'adosse à celle des découvertes les plus évidentes de la médecine, comme les vaccins, ou les antibiotiques, largement véhiculée par les réseaux sociaux. Seul l'allongement de la vie semble faire consensus. Les travaux des agences de santé sont désormais mis en cause. « *Tout argument est soupçonné, démonté* », résume Frédéric Worms. « *Le progressisme est en baisse à la bourse des idées, et un soupçon général pèse sur les sciences* », confirme le philosophe Francis Wolff, professeur émérite à l'Ecole normale supérieure.

L' « illusion du progrès » est aussi dénoncée par la critique anticapitaliste. A gauche comme à droite, celle-ci rappelle volontiers que le libéralisme économique, théorisé par Adam Smith, est l'héritier des Lumières. « *Une fois qu'on a compris que le libéralisme et le capitalisme sont des produits de la modernité et de la philosophie des Lumières, on comprend alors que la notion de progrès est beaucoup plus ambiguë qu'il n'y paraît* », dénonce par exemple l'essayiste antilibéral Jean-Claude Michéa, ancien communiste et « *conservateur* » assumé.

« *Il faut un peu desserrer l'étau du credo hérité des Lumières : d'un côté la vertu, la science et la liberté, de l'autre les sorciers du bocage et les obscurantistes ! Trop facile !* », s'agaçait déjà en 2006 l'écrivain Régis Debray à l'occasion de la parution de son ouvrage *Aveuglantes Lumières*, publié chez Gallimard. « *Les Lumières, en dépit de notre triomphalisme et de notre ethnocentrisme glorieux, ont des zones d'ombre capitales* » assure le philosophe, comme « *l'imaginaire,* *le sentiment du collectif, notre rapport à la mort, à l'animalité…* » Et d'abord « *la religion* », qui, depuis la fin du XX^e siècle, effectue son grand retour, mais dans un paysage redessiné : l'islam est en plein essor, l'expression « cathos de gauche » a disparu.

Sous ces coups de boutoir portés à la Raison, les catholiques ultraconservateurs voient l'occasion d'une revanche contre un ennemi ancestral qui semblait les avoir terrassés. L'antagonisme entre les Lumières et les religions, solidement ancré dans l'histoire française, resurgit. « *Tout ce qui est éternel dans la religion, tout ce qui est permanent dans la société y est à la fois détruit et méconnu* », assénait le monarchiste et catholique Louis de Bonald dès le début du XIX^e siècle. L'universalisme des Lumières était déjà accusé de couper l'homme de ses racines pour dessiner un être abstrait et désincarné, détourné de l'ordre naturel divin. « *Que j'en veux à ces Français qui ont (…) céd[é] le sceptre de la philosophie rationnelle à ce faux dieu du XVIII^e siècle, qui ne sait rien, qui ne dit rien, qui ne peut rien, et dont ils ont élevé le piédestal devant la face du Seigneur, sur la foi de quelques fanatiques encore plus mauvais citoyens que mauvais philosophes* », écrivait le chef de file des contre-révolutionnaires, Joseph de Maistre, dans ses *Considérations sur la France* (1796). (…)

« *Au fond, il y a une certaine continuité dans la critique classique des Lumières* », estime l'historien britannique spécialiste de la France Sudhir Hazareesingh, auteur de *Ce pays qui aime les idées* (Flammarion, 2015) : aux XVIII^e et XIX^e siècles, les contempteurs de la Révolution, Burke, Bonald et Maistre, avaient déjà dégainé tout l'éventail des arguments pour discréditer les idées des Philosophes.

« *A gauche*, poursuit le professeur à l'université d'Oxford, *c'est différent.* » A partir des années 1920, une première critique, autour de l'école de Francfort, avait commencé à dénoncer les dangers de la rationalité technique et détricoté le lien entre gauche et progrès. Puis, sous l'influence du penseur Michel Foucault, un courant entreprend, à partir des années 1970, de déconstruire les principes hérités des Philosophes, accusés de porter en germe les totalitarismes contemporains. « *Dans* Surveiller et punir*, en 1975, Foucault montre que l'ambition de contrôler l'être humain est un héritage indirect de la tradition des Lumières* », assure Sudhir Hazareesingh.

Les intellectuels de gauche se divisent. Certains opèrent un retour aux Lumières par le biais d'un courant « néorépublicain » qui renaît dans les années 1990 sur les décombres du marxisme. Dans ce sillage, des figures de proue du monde intellectuel font de la défense pure et dure de la laïcité leur nouveau combat. (…) Une autre partie de la gauche intellectuelle investit, elle, les études postcoloniales. Une nouvelle critique se fait jour en lien avec les *cultural studies* nées aux Etats-Unis. *L'Orientalisme*, d'Edward Said, publié en France en 1980 (Seuil), en constitue l'une des œuvres fondatrices. Les Lumières sont accusées par les intellectuels postcocoloniaux d'avoir légitimé une « domination occidentale » sur le monde. « *Pour eux, les principes abstraits issus de la Révolution française se sont fracassés sur la réalité du XIX^e siècle, où l'esclavage et la colonisation ont pu se trouver justifiés par le rationalisme* », résume Sudhir Hazareesingh. (…)

Les mobilisations féministes, elles aussi, s'interrogent sur la valeur des Lumières dans le combat pour l'émancipation. Comment brandir l'étendard de l'universel et exclure les femmes de la citoyenneté, dénoncent une partie d'entre elles ? Elles s'inspirent d'Olympe de Gouges et sa Déclaration des droits de la femme et de la citoyenne, rédigée en 1791, mais aussi de Nicolas de Condorcet. Dans *Sur l'admission des femmes au droit de cité* (1790), le penseur et député girondin soulignait la contradiction théorique et politique de l'exclusion des femmes du droit de vote. « *La première mise en cause de l'universalisme est féminine,* soutient la philosophe Silyane Larcher, *dès le XVIIIe siècle* ». (...)

Trois siècles après sa naissance, la pensée des Lumières reste disséquée dans ses moindres replis. « *La mode est à la philosophie du soupçon, à la déconstruction,* déplore Francis Wolff : *chercher derrière tout ce qui se présente comme universel l'intérêt particulier, le « d'où parlez-vous ». Certes, on peut déconstruire les Lumières et dénoncer ses errements. Mais au nom de quoi mener la lutte pour la libération des femmes ou des minorités, sinon au nom de l'universel ?* », interroge l'universitaire.

« *Dès que les Lumières sont apparues, elles ont été critiquées de l'intérieur. Mais c'était pour les faire progresser, ce qui n'est pas forcément le cas aujourd'hui* », s'inquiète aussi le philosophe Frédéric Worms. Les Lumières seraient-elles devenues solubles dans la (post)modernité ? « *Des gens comme moi pensent encore qu'on n'a pas besoin de les défendre,* réfléchit à voix haute l'historien de Sciences Po Lucien Jaume. *Peut-être sommes-nous trop optimistes...* »

Extraits d'un article d'Ariane Chemin et Vincent Martigny, « Ces ombres qui planent sur l'esprit des Lumières », *Le Monde*, 17 novembre 2018.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2019

Épreuve d'anglais

Durée : 2h

L'épreuve est constituée de deux parties : un résumé et une traduction. Vous rédigerez ces deux parties sur **deux copies séparées**, sur lesquelles vous indiquerez « Anglais / résumé » et « Anglais / traduction ».

1 Summarize this text in English in 200 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

Slower growth in ageing economies is not inevitable
From The Economist, Mar 28, 2019

FOR THE first time in history, the Earth has more people over the age of 65 than under the age of five. In another two decades the ratio will be two-to-one, according to a recent analysis by Torsten Sløk of Deutsche Bank. The trend has economists worried about everything from soaring pension costs to "secular stagnation"—the chronically weak growth that comes from having too few investment opportunities to absorb available savings. The world's greying is inevitable. But its negative effects on growth are not. If older societies grow more slowly, that may be because they prefer familiarity to dynamism.

Ageing slows growth in several ways. One is that there are fewer new workers to boost output. Workforces in some 40 countries are already shrinking because of demographic change. As the number of elderly people increases, governments may neglect growth-boosting public investment in education and infrastructure in favour of spending on pensions and health care. People in work, required to support ever more pensioners, must pay higher taxes. But the biggest hit to growth comes from weakening productivity. A study published in 2016, for example, examined economic performance across American states. It found that a rise of 10% in the share of a state's population that is over 60 cuts the growth rate of output per person by roughly half a percentage point, with two-thirds of that decline due to weaker growth in productivity.

Why are older economies less productive? The answer is not, as one might suppose, that older workers are. Though some capabilities, notably physical ones, deteriorate with age, the overall effect is not dramatic. A study of Germany's manufacturing sector published in 2016 failed to detect a drop-off in productivity in workers up to the age of 60. Companies can tweak employees' roles as they get older in order to make best use of the advantages of age, such as extensive experience and professional connections.

Furthermore, if weak productivity growth was caused by older workers producing less, pay patterns should reflect that. Wages would tend to rise at the beginning of a career and fall towards its end. But that is not what usually happens. Rather, according to a recent paper by economists at Moody's Analytics, a consultancy, wages are lower for everyone in companies with lots of older workers. It is not older workers' falling productivity that seems to hold back the economy, but their influence on those around them. That influence is potent: the authors reckon that as much as a percentage point of America's recent decline in annual productivity growth could be associated with ageing.

How this influence makes itself felt is unclear. But the authors suggest that companies with more older workers might be less eager to embrace new technologies. That might be because they are reluctant to make investments that would require employees to be retrained, given the shorter period over which they could hope to make a return on that training for those near the end of their careers. Or older bosses might be to blame. Research indicates that younger managers are more likely to adopt new technologies than are older ones. This may seem obvious: older people's greater aversion to new technology is a cliché. And at least anecdotally, greying industries do seem more averse to change.

If the evidence suggested that ageing economies struggled primarily because of slow-growing labour forces and fast-growing pension costs, it would make sense to focus policy efforts on keeping people in work longer—by raising retirement ages, for example. But if, as seems to be the case, reluctance to embrace new technologies is a bigger issue, other goals should take priority—in particular, boosting competition. In America, increasing industrial concentration and persistently high profits are spurring renewed interest in antitrust rules. The benefits of breaking up powerful firms and increasing competition might be even bigger than thought, if conservative old firms are thereby spurred to make better use of newer technologies.

There are other measures that could help. Removing barriers to job-switching, for example by making benefits more portable, could shorten average tenures and help stop companies' cultures becoming ossified. Best of all would be more immigration. An influx of young foreign workers would address nearly all the ways in which population ageing depresses growth. It would not only expand the labour force and create new taxpayers, but would mean more and younger companies, and greater openness to new technologies. And there would be plenty of willing takers in poorer countries with younger populations.

Societies with lots of older workers are also societies with lots of older voters, however. Those voters are, on average, more politically conservative than younger people, and less likely to support increased immigration. People of all ages would gain from policies that boosted growth and productivity. But given the choice between a dynamic but unfamiliar society and a static but familiar one, older countries tend to opt for the second. In hindsight, the demographic boom that coincided with industrialisation in rich countries may have had an underappreciated benefit: it created a big constituency in favour of embracing new technologies and the opportunities they provided.

Technology may at some point overcome the stifling effect of ageing. In a new paper Daron Acemoglu of the Massachusetts Institute of Technology and Pascual Restrepo of Boston University find that when young workers are sufficiently scarce, manufacturers invest in more automation, and experience faster productivity growth as a result. Robots have yet to make a big impact in the service sector and beyond, but as their capabilities improve and jobs for younger people go begging that may change. The world could use more flexibility and productivity now. But stagnation may end eventually, once the robots are promoted to management.

2 Translate the following text into French

Older workers helped fuel recent U.S. growth.
Adapted from Reuters, April 24, 2019

As a record-breaking economic expansion nears the decade mark, people like Marty Groth may determine whether it is forced into a lower gear. Not long ago, the 60-year-old Groth found himself out of a job and considered retiring on a pension built over a career of maintaining computer servers and printers.

Instead, he returned to school to update his computer skills and will soon join a Wisconsin labor force that is decidedly short of workers.

Over the last three years, around 3 million Americans over 55 joined or rejoined the workforce, federal data show. The addition of these older workers not only contributed to economic growth, experts say, but helped stop a national decline in the share of adults working or looking for work.

The trend may have run its course. After adding 5 million new and returning workers of all ages from 2016 to 2018, the U.S. labor force shrank during the first three months of this year.

From healthcare to manufacturing, companies are taking longer to hire as they struggle to find workers; some have delayed projects, others have become more willing to hire ex-convicts and less experienced workers bypassed when labor markets were looser, local officials say.

The upshot, according to policymakers, business executives and labor experts, is that the labor market may be nearing its limits.

Over a long enough period, labor shortages can spark investment and raise productivity as companies retool. They can also improve opportunities for minorities with unemployment rates higher than those for whites.

Any employer, if they are willing to raise wages enough, at some point will get all the workers they need. But it is coming at a higher cost and projects that were profitable in a lower wage environment are not profitable anymore.