Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2020

Épreuve de mathématiques

Durée : 3h

En dehors de sa dernière question, la partie II est indépendante de la partie I.

Partie I - Intégrales généralisées de Dirichlet

1. *Les sous-questions sont indépendantes.*

   (a) On considère la fonction

   $$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0; \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases} \end{array}$$

   Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

   (b) i. Prouver la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

   On **admet** l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\cdot$

   ii. Déterminer, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t}\,\mathrm{d}t$.

   (c) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $t \mapsto \ln g(t)$.

   (d) On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot$

   Donner, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, un équivalent de $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

   (a) Vérifier que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   (b) Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$?

3. On pose, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t > 0$, $h_n(t) = \sin^n t$.

   Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

   (a) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Justifier l'existence d'un réel $K > 0$ pour lequel, pour tout réel t, on a : $\left|h_n^{(k)}(t)\right| \leqslant K$.

   (b) i. Quel est le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction h_n ?

ii. Établir l'égalité : $\lim_{t\to 0} \dfrac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

(c) Justifier, pour tout entier $k \in [\![0, n-2]\!]$, la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\,\mathrm{d}t$.

(d) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et établir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Établir, pour tout réel t, l'égalité

$$h_{2n}(t) = \sin^{2n} t = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} \mathrm{e}^{i(2n-2k)t}.$$

(b) En déduire, pour tout réel t, l'égalité

$$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} \sin(2jt).$$

(c) En déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1}$.

5. `Étude asymptotique de la suite de terme général` $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t$

(a) Prouver, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'évaluation $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cdot$

(b) i. Étudier la monotonie de la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]\cdot$

ii. En déduire, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'évaluation asymptotique :

$$\int_{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cdot$$

On pourra, en utilisant le résultat de la question 1-c), donner un équivalent de $\ln\left(\dfrac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)$ *où* $\varepsilon_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\cdot$

(c) i. Justifier l'existence de $a > 0$ tel que, pour tout $u \in [0, a]$, on a : $|\mathrm{e}^{-u} - 1| \leqslant 2u$.

ii. Justifier l'existence d'un réel $b > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, b]$,

$$-t^3 \leqslant \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leqslant 0.$$

On utilisera le résultat de la question 1-c).

iii. En déduire, pour tout entier n assez grand, l'inégalité

$$\left|\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}\left(1-\mathrm{e}^{-nt^3}\right)\mathrm{d}t,$$

puis, toujours quand l'entier n est assez grand, l'inégalité

$$\left|\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\,\frac{\ln^4 n}{n}\cdot$$

(d) En déduire, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, l'équivalence :

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}\cdot$$

On se souviendra du résultat de 1-d).

Partie II Montées d'une permutation de $[\![1,n]\!]$

On appelle, pour tout entier naturel n non nul, **montée** d'une liste $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ d'entiers naturels **distincts deux à deux** toute sous-liste $(a_p,a_{p+1},\ldots,a_q)$ (avec $p\leqslant q$) vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} & p=1 \text{ ou } a_{p-1}>a_p \\ \text{et} & a_p<a_{p+1}<\cdots<a_q \text{ (si } p<q) \\ \text{et} & q=n \text{ ou } a_q>a_{q+1} \end{cases}$$

On note $M(a)$ le nombre de montées de la liste a. Par exemple, les montées de la liste $a=(2,5,7,6,1,4,3,8)$ sont $(2,5,7)$, (6), $(1,4)$ et $(3,8)$, et donc $M(a)=4$.

On définit de même la notion de descente d'une liste a d'entiers naturels distincts deux à deux et son nombre de descentes $D(a)$. Par exemple, les descentes de la liste $a=(2,5,7,6,1,4,3,8)$ sont (2), (5), $(7,6,1)$, $(4,3)$ et (8), et donc $D(a)=5$.

On note, pour tout entier naturel n non nul, S_n l'ensemble des n-listes d'éléments de $[\![1,n]\!]$ **distincts deux à deux**.

Il est clair que, pour toute liste a de S_n, on a $1\leqslant M(a)\leqslant n$ et $1\leqslant D(a)\leqslant n$.

Enfin, pour tout entier naturel k, on note $E_n(k)$ le nombre de listes a de S_n ayant exactement k montées. Autrement dit, $E_n(k)=\operatorname{card}\left\{a\in \mathrm{S}_n\,;\,M(a)=k\right\}$. On a donc, $E_n(0)=0$ ainsi que $E_n(k)=0$ pour tout entier $k>n$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

   (a) Déterminer les valeurs de $E_n(1)$ et $E_n(n)$.

   (b) Soit k un entier fixé compris entre 1 et n.
   Donner un exemple de liste a de S_n pour laquelle $M(a)=k$.

2. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul et pour toute liste a de S_n, la valeur de $M(a)+D(a)$.

   En notant, pour $i\in[\![1,n-1]\!]$, s_i la somme du nombre de montées et du nombre de descentes de $(a_1,a_2,\ldots,a_i)$, on évaluera, en fonction du nombre s_i, la somme s_{i+1} des nombres de montées et de descentes de $(a_1,a_2,\ldots,a_{i+1})$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On associe, à toute liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de S_n, la liste

$$\Psi(a) = (n+1-a_1, n+1-a_2, \dots, n+1-a_n).$$

   (a) Vérifier que l'application Ψ est une bijection de S_n sur S_n.

   (b) En déduire, pour tout entier k de $[\![1,n]\!]$, l'égalité : $E_n(k) = E_n(n+1-k)$.

4. `Calcul de` $E_n(2)$

   Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

   (a) Quel est le nombre de couples (A,B) de parties **non vides** de $[\![1,n]\!]$ tels que

$$A \cup B = [\![1,n]\!] \text{ et } A \cap B = \emptyset.$$

   (b) Établir l'égalité : $E_n(2) = 2^n - (n+1)$.

5. `Une relation de récurrence`

   Soit n un entier naturel non nul. À toute liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ de S_{n+1}, on associe la liste $\varphi_n(a)$ de S_n obtenue en ôtant l'élément $(n+1)$ de la liste a. Par exemple, dans le cas particulier où $n = 5$, si $a = (3,4,1,5,6,2)$, alors $\varphi_5(a) = (3,4,1,5,2)$, et si $a = (6,3,4,1,5,2)$ alors $\varphi_5(a) = (3,4,1,5,2)$.

   (a) Soit $b = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un élément de S_n. Comment s'écrivent les éléments de S_{n+1} dont l'image par φ_n est égale à b ?

   (b) Soit k dans $[\![1,n]\!]$ et soit b dans S_n tels que $M(b) = k$. Quelles sont les valeurs possibles de $M(a)$ pour un élément a de S_{n+1} dont l'image par φ_n est égale à b ?

   (c) Établir, pour tout entier k de $[\![1,n]\!]$, l'égalité :

$$E_{n+1}(k+1) = (k+1)E_n(k+1) + (n+1-k)E_n(k).$$

   Vérifier que cette formule tient également pour $k = 0$ et pour tout entier $k > n$.

   (d) Donner, en détaillant le calcul de $E_5(3)$, les valeurs de $E_n(k)$ pour tous les couples d'entiers (n,k) tels que $1 \leqslant k \leqslant n \leqslant 5$. On consignera les résultats dans un tableau, n étant l'indice de ligne et k l'indice de colonne.

6. `La formule de Worpitzky`

   Établir, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, l'égalité

$$E_n(k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k-j} j^n.$$

   On raisonnera par récurrence sur l'entier n.

7. `Une égalité miraculeuse !`

   Justifier, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$E_{2n-1}(n) = \frac{2}{\pi}(2n-1)! \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n} \mathrm{d}t.$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2020

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 3h

Les matrices de Hessenberg sont des matrices « presque triangulaires », qui permettent d'économiser les calculs lors de la mise en œuvre d'algorithmes d'analyse numérique. L'objet du problème est d'examiner le comportement asymptotique des puissances de certaines de ces matrices.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Dans tout l'énoncé, n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 3.

• Le coefficient situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne d'une matrice M est noté $M[i,j]$.

• Les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, dont tous les coefficients sont nuls sauf un, égal à 1, sont notées $E_{i,j}^{(n)}$. Ainsi a-t-on, pour tout couple $(i,j) \in [[1,n]]^2$:

$$\forall\,(\ell,k) \in [[1,n]]^2, \quad E_{i,j}^{(n)}[\ell,k] = \delta_i^\ell\,\delta_j^k = \begin{cases} 1 & \ell = i \text{ et } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où δ_i^ℓ (respectivement δ_j^k) vaut 1 si $i = \ell$ (respectivement $j = k$), 0 sinon.

• Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note u_M (respectivement v_M) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (respectivement $\mathbb{C}^n$) canoniquement associé à M, c'est-à-dire l'endomorphisme dont M est la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_n = (e_1,\ldots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (respectivement $\mathbb{C}^n$). On appelle *spectre* de M l'ensemble, noté $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(M)$, des valeurs propres de v_M (il s'agit d'une partie non vide de $\mathbb{C}$).

• Lorsque doit être établie la convergence d'une suite de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il s'agit de la convergence pour l'une quelconque des normes sur cet espace vectoriel, toutes équivalentes puisqu'il est de dimension finie.

Partie I Matrices de Hessenberg

• On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice de Hessenberg* si tous ses coefficients $M[i,j]$ situés en dessous de la « sous-diagonale », c'est-à-dire tels que $i \geq j+2$, sont nuls.

Par exemple, les matrices de Hessenberg de $\mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} M[1,1] & M[1,2] & M[1,3] & M[1,4] & M[1,5] \\ M[2,1] & M[2,2] & M[2,3] & M[2,4] & M[2,5] \\ 0 & M[3,2] & M[3,3] & M[3,4] & M[3,5] \\ 0 & 0 & M[4,3] & M[4,4] & M[4,5] \\ 0 & 0 & 0 & M[5,4] & M[5,5] \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on note $\mathscr{H}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de Hessenberg de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   a) Justifier que $\mathscr{H}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   b) En donner une base et la dimension.

2. Soit a un réel strictement positif. On note $H_+(a)$ et $H_-(a)$ les deux matrices de Hessenberg de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$H_+(a) = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a+\sqrt{a} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_-(a) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ -1 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

   a) Trouver les valeurs propres de la matrice $H_+(a)$ et montrer qu'elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

   b) Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que la suite de matrices $\left(\dfrac{1}{r^p}\big(H_+(a)\big)^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, le réel r est supérieur ou égal à $a+\sqrt{a}$.

   c) Soit $Q(a) = \lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{1}{(a+\sqrt{a})^p}\big(H_+(a)\big)^p$.
   Justifier que l'endomorphisme $u_{Q(a)}$ de $\mathbb{R}^n$ est un projecteur, dont on précisera le rang, l'image et le noyau.

   d) Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que la suite de matrices $\left(\dfrac{1}{r^p}\big(H_-(a)\big)^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, le réel r est strictement supérieur à $\sqrt{a(1+a)}$.

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note $J_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} E_{j+1,j}^{(n)}$ et $H_n(a,b) = a\,I_n + bJ_n$.

   a) Calculer les puissances successives de la matrice J_3 et donner, sans démonstration, une expression générale des puissances $(J_n)^q$ $(q \in \mathbb{N})$.

   b) Établir, pour tout entier $p \geq n-1$, l'égalité

$$\big(H_n(a,b)\big)^p = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} \binom{p}{i-j} a^{p-i+j}\, b^{i-j} E_{i,j}^{(n)}$$

   et en déduire que, si a et b sont différents de 0, alors tous les coefficients de la matrice $\big(H_n(a,b)\big)^{n-1}$ situés sur ou en dessous de la diagonale (c'est-à-dire dont l'indice de ligne est supérieur ou égal à l'indice de colonne) sont différents de 0.

   c) Pour quelles valeurs de (a,b) la suite $\left(\big(H_n(a,b)\big)^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Partie II Rayon spectral

Dans cette partie, on considère une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $\rho(M)$ le plus grand des modules des éléments du spectre de M, appelé *rayon spectral de M* :

$$\rho(M) = \text{Max}\,\{|\,\lambda\,|\,;\ \lambda \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(M)\}\ .$$

4. Soit ε un nombre réel strictement positif et P_ε la matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont donnés par :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ P_\varepsilon[i,i] = \varepsilon^i\ .$$

a) Calculer, pour toute matrice triangulaire supérieure T de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, les coefficients de la matrice $P_\varepsilon^{-1}\,T\,P_\varepsilon$.

b) En déduire que, pour tout réel $\alpha > 0$, il existe une matrice triangulaire semblable à T dont tous les coefficients non diagonaux sont de modules inférieurs ou égaux à α.

c) Démontrer que pour tout réel $r > \rho(M)$, il existe une matrice inversible P à coefficients complexes pour laquelle la matrice $M' = P^{-1}MP$ est triangulaire et le module de chacun de ses coefficients au plus égal à r, c'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ |\,M'[i,j]\,| \leq r\ .$$

5. Justifier, pour tout réel $r > \rho(M)$, la convergence de la suite $\left(\dfrac{1}{r^p}M^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ vers la matrice nulle.

6. On suppose dans cette question que le polynôme caractéristique de M possède au moins une racine réelle simple, que l'on note λ.
On note u_M^* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de u_M, dont la matrice dans la base canonique est la transposée ${}^tM$ de la matrice M.

a) Justifier l'existence de deux éléments non nuls x et y de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$u_M(x) = \lambda\,x \qquad \text{et} \qquad u_M^*(y) = \lambda\,y.$$

b) Démontrer que l'orthogonal $\text{Vect}\{y\}^\perp$ de la droite vectorielle engendrée par le vecteur y, pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, est stable par l'endomorphisme u_M et que λ n'est pas une valeur propre de l'endomorphisme de $\text{Vect}\{y\}^\perp$ induit par u_M.

c) En déduire que $\text{Vect}\{y\}^\perp$ et $\text{Vect}\{x\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

d) On note Q la matrice dans la base canonique du projecteur de $\mathbb{R}^n$ d'image $\text{Vect}\{x\}$ et de noyau $\text{Vect}\{y\}^\perp$.
Démontrer que, si λ est égal au rayon spectral $\rho(M)$ et si tous les éléments de $\text{sp}_{\mathbb{C}}(M)$ distincts de λ ont un module strictement inférieur à $\rho(M)$, alors la suite $\left(\dfrac{1}{\rho(M)^p}M^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite Q.

Partie III Matrices irréductibles

Pour toute partie J de $[\![1, n]\!]$, on note F_J le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs e_j de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dont l'indice j appartient à J :

$$F_J = \mathrm{Vect}\{e_j\,;\, j \in J\}$$

(qui est réduit au vecteur nul lorsque J est vide).

• On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *J-réduite* si F_J est stable par l'endomorphisme u_M et on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})[J]$ l'ensemble des matrices J-réduites de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})[J] = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\,;\, u_M(F_J) \subseteq F_J\}\ .$$

• On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *irréductible* s'il n'existe aucune partie J de $[\![1, n]\!]$, non vide et distincte de $[\![1, n]\!]$, pour laquelle M est J-réduite.

7. Exemples

   a) Pour quelles parties non vides J de $\{1, 2, 3\}$ les matrices $H_+(a)$ et $H_-(a)$ de la question 2 sont-elles J-réduites ?

   b) Démontrer qu'aucune des matrices $H_n(a, b)$ de la question 3 n'est irréductible.

8. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   Démontrer que, pour que M soit irréductible, il suffit qu'il existe un entier naturel p pour lequel tous les coefficients de la matrice M^p sont différents de 0.

Pour traiter la dernière question du problème, on admettra les deux résultats suivants (théorèmes de Perron-Frobenius).

• Si une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est à coefficients positifs ou nuls, alors $\rho(N)$ appartient au spectre de N.

• Si une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est à coefficients strictement positifs, alors $\rho(N)$ en est la seule valeur propre de module maximal et la dimension du sous-espace propre qui lui est associé est égale à 1.

9. Soit H une matrice de $\mathscr{H}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients situés sur et au dessus de la sous-diagonale sont strictement positifs :

$$\forall\,(i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \leq j + 1 \Longrightarrow H[i, j] > 0\ .$$

   a) Justifier l'existence de deux réels strictement positifs a et b pour lesquels tous les coefficients de $H - H_n(a, b)$ sont positifs ou nuls.

   b) En déduire que H est irréductible.

   c) Démontrer que la suite $\left(\dfrac{1}{\rho(H)^p} H^p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice qui est canoniquement associée à un projecteur de rang 1.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2020

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 3h

L'objet du problème est l'étude de deux mesures de risques fréquemment utilisées en gestion financière : la *Value-at-Risk (VaR)* et la *Tail-VaR*. Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante. La notation tiendra bien évidemment compte de la clarté et de la précision des réponses.

Notations et rappels

Pour l'ensemble du problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ où $\mathscr{A}$ est une tribu de parties de Ω et $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité.

- On note $\mathscr{X}$ l'ensemble des **variables aléatoires réelles**. Un élément de $\mathscr{X}$ est donc une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[X \leq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathscr{A}$.
- Soit $X \in \mathscr{X}$. La fonction F définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \mathbb{P}([X \leq x])$ est la **fonction de répartition** de X. On admettra que cette fonction est nécessairement croissante et continue à droite.
- Un **vecteur aléatoire** de taille $n \geq 1$ est un n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ où pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $X_i \in \mathscr{X}$ et pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $[X_1 \leq x_1] \cap \ldots \cap [X_n \leq x_n] \in \mathscr{A}$.
- Deux vecteurs aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont dits **égaux en loi** si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}([X_1 \leq x_1] \cap \ldots \cap [X_n \leq x_n]) = \mathbb{P}([Y_1 \leq x_1] \cap \ldots \cap [Y_n \leq x_n])$. L'égalité en loi est notée $(X_1, \ldots, X_n) \stackrel{\mathscr{L}}{=} (Y_1, \ldots, Y_n)$.
- Si la fonction de répartition de $X \in \mathscr{X}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (éventuellement privé d'un ensemble fini de points) alors X est une **variable aléatoire à densité**. En notant $f = F'$ la dérivée de F on a pour toute fonction continue positive $g : \mathbb{R} \to [0, \infty[$
$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$
- Pour tout $X \in \mathscr{X}$ admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$, l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev** assure que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}([|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$
- Soit $(X_n \in \mathscr{X},\ n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires. On dit que X_n **converge en probabilité** vers $c \in \mathbb{R}$ ($X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$) si pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}([|X_n - c| \geq \varepsilon]) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ alors $g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(c)$.
- Soit $(X_n \in \mathscr{X},\ n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires que l'on supposera indépendantes et de même loi. Si ces variables aléatoires admettent une espérance égale à $\mu \in \mathbb{R}$, la **loi faible des grands nombres** assure que
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$

Introduction du problème

En gestion financière, il est primordial de pouvoir évaluer le risque associé à un portefeuille d'actifs. Plus précisément, si la perte d'un portefeuille sur une période de temps donnée est modélisée par une variable aléatoire X, on souhaite quantifier le risque d'une perte importante de capital en résumant les valeurs prises par X par une unique valeur réelle $\mathscr{R}(X)$ appelée **mesure de risque**. L'objectif de ce problème est l'étude de deux mesures de risque classiques en gestion financière : la **Value-at-Risk (VaR)** et la **Tail-VaR**.

Dans un premier temps, nous supposerons que les variables aléatoires $X \in \mathscr{X}$ considérées admettent une fonction de répartition $F(\cdot) = \mathbb{P}([X \leq \cdot])$ vérifiant la propriété suivante : il existe un sous ensemble $I \subset \mathbb{R}$ tel que F est une bijection de I dans $]0,1[$.
Dans ce cadre [1], la **Value-at-Risk** au niveau $\alpha \in]0,1[$ d'une variable aléatoire $X \in \mathscr{X}$ modélisant la perte d'un portefeuille d'actifs est donnée par

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = F^{-1}(1-\alpha),$$

où F^{-1} est la bijection réciproque de F. Il est évident que la valeur $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ est telle que $\mathbb{P}([X \leq \mathrm{VaR}_\alpha(X)]) = 1-\alpha$. On a ainsi une confiance de $(1-\alpha)\%$ que la perte du portefeuille n'excède pas la Value-at-Risk. Ainsi, plus la valeur de $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ est élevée, plus l'investissement dans le portefeuille d'actifs semble risqué. En pratique la valeur de α sera choisie proche de 0 (typiquement $\alpha = 0.01$ ou $\alpha = 0.05$).
La seconde mesure de risque que l'on considère dans ce problème est la **Tail-VaR** au niveau $\alpha \in]0,1[$ définie pour tout $X \in \mathscr{X}_1 = \{X \in \mathscr{X} \mid \mathbb{E}(|X|) < \infty\} \subset \mathscr{X}$ par

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \mathrm{VaR}_s(X)\,ds.$$

Nous montrerons dans la partie III que l'intégrale ci-dessus est bien définie pour tout $X \in \mathscr{X}_1$. La Tail-VaR peut donc être vue comme la moyenne des Value-at-Risk de niveau $s \in]0,\alpha]$. Cette mesure de risque présente l'avantage de prendre en compte l'information apportée par les valeurs de X supérieures à la Value-at-Risk de niveau α. Ici encore, une grande valeur de $\mathrm{TVaR}_\alpha(X)$ est associée à un investissement risqué.

I – Application

Vous souhaitez choisir entre deux portefeuilles d'actifs P_1 et P_2 afin d'effectuer un investissement le moins risqué possible. La perte (en K€, sur une période de 10 jours) du portefeuille P_1 est modélisée par $X_1 \in \mathscr{X}$ et celle de P_2 par $X_2 \in \mathscr{X}$. Les fonctions de répartition F_1

1. Le cas des variables aléatoires dont la fonction de répartition est non nécessairement bijective sera traité dans la partie III.

et F_2 de X_1 et X_2 sont données par

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1-(1+x)^{-\lambda} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et } F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1-\exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

où $\lambda > 0$. Pour effectuer votre choix, vous mesurez dans un premier temps le risque par la Value-at-Risk.

I-1) Calculer en fonction de $\lambda > 0$ et $\alpha \in]0,1[$ les valeurs $\mathrm{VaR}_\alpha(X_1)$ et $\mathrm{VaR}_\alpha(X_2)$.

I-2) Montrer que pour tout $x > 1$, $\ln(x) < x-1$.

I-3) Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$ et $\lambda > 0$, $\mathrm{VaR}_\alpha(X_1) > \mathrm{VaR}_\alpha(X_2)$. Conclure quant au choix du portefeuille.

Vous souhaitez conforter votre choix de portefeuille en mesurant également le risque par la Tail-VaR.

I-4) Déterminer le sous-ensemble $L \subset]0,\infty[$ tel que pour tout $\lambda \in L$, $\mathbb{E}(|X_1|) = \mathbb{E}(X_1) < \infty$.

I-5) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $\mathbb{E}(|X_2|) = \mathbb{E}(X_2) < \infty$.

I-6) Pour tout $\lambda \in L$ et $\alpha \in]0,1[$, calculer les valeurs $\mathrm{TVaR}_\alpha(X_1)$ et $\mathrm{TVaR}_\alpha(X_2)$.

I-7) Montrer que pour tout $x > 1$ et $\lambda > 1$, $\lambda/(\lambda-1)x - 1 > 1/\lambda + \ln(x)$.

I-8) Pour tout $\lambda \in L$ et $\alpha \in]0,1[$, comparer les valeurs $\mathrm{TVaR}_\alpha(X_1)$ et $\mathrm{TVaR}_\alpha(X_2)$ et conclure quant au choix du portefeuille.

Dans cette application, les fonctions de répartition F_1 et F_2 sont continues sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ avec de plus $F_1^{-1}(1-\alpha) \to \infty$ et $F_2^{-1}(1-\alpha) \to \infty$ lorsque $\alpha \to 0$. Dans ce cas, la Tail-VaR peut être écrite différemment. C'est ce que l'on se propose de montrer dans la question suivante.

I-9) Dans le cas où la fonction de répartition F de X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (éventuellement privé d'un ensemble fini de points) avec de plus $F^{-1}(1-\alpha) \to \infty$ lorsque $\alpha \to 0$, montrer, en effectuant un changement de variable judicieux, que

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_{F^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} t f(t) dt = \mathbb{E}\left(X \mid X > F^{-1}(1-\alpha)\right),$$

où f est la dérivée de F. Pour la dernière égalité, on rappelle que pour tout $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, $\mathbb{E}(X|A) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)/\mathbb{P}(A)$ où $\mathbb{1}_A$ est la fonction indicatrice[2].

I-10) Vérifier l'égalité ci-dessus pour les variables aléatoires X_1 et X_2.

II - Estimation de la Value-at-Risk

Soit $n \geq 1$ un entier et soient $x_1, \ldots, x_n$ les pertes (en k€, sur 10 jours) observées pour un portefeuille d'actifs. On admet que ses valeurs sont les réalisations de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ supposées indépendantes et de même loi que $X \in \mathscr{X}$ de fonction de répartition F (ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}([X_1 \leq x]) = \ldots = \mathbb{P}([X_n \leq x]) = \mathbb{P}([X \leq x]) = F(x)$).

2. Pour tout $E \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{1}_E : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ est la fonction telle que $\mathbb{1}_E(x) = 1$ si $x \in E$ et $\mathbb{1}_E(x) = 0$ si $x \notin E$.

On notera $X_{1,n} \leq \ldots \leq X_{n,n}$ les statistiques d'ordre associées aux variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$. Plus précisément, le vecteur aléatoire $(X_{1,n}, \ldots, X_{n,n})$ est tel que pour tout $\omega \in \Omega$,

$$(X_{1,n}(\omega), \ldots, X_{n,n}(\omega))$$

est le vecteur obtenu en rangeant par ordre croissant les valeurs $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$. Les quatre questions suivantes ont pour but de vous familiariser avec la notion de statistiques d'ordre.

II-1) Pour $n = 4$, le tableau suivant donne les valeurs des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_4$ aux points $\omega_1 \in \Omega$ et $\omega_2 \in \Omega$.

$X_1(\omega_1) = 0.73$	$X_2(\omega_1) = 0.94$	$X_3(\omega_1) = 0.62$	$X_4(\omega_1) = 0.51$
$X_1(\omega_2) = 0.21$	$X_2(\omega_2) = 0.79$	$X_3(\omega_2) = 0.81$	$X_4(\omega_2) = 0.31$

Quelle est la valeur de $X_{3,4}(\omega_1)$? Celle de $X_{3,4}(\omega_2)$?

II-2) Expliquer pourquoi pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $[X_{n,n} \leq x] = [X_1 \leq x] \cap \ldots \cap [X_n \leq x]$.

II-3) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}[X_{n,n} \leq x] = F^n(x)$.

II-4) Donner l'expression de $\mathbb{P}[X_{1,n} \leq x]$ en fonction de $F(x)$.

Nous souhaitons estimer la Value-at-Risk au niveau $\alpha \in]0,1[$, c'est-à-dire trouver une variable aléatoire observable qui converge (dans un sens que l'on précisera plus loin) vers $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$. Nous proposons l'estimateur suivant

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_{n,\alpha}(X) = X_{\lceil n(1-\alpha)\rceil, n},$$

où $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid x \leq k\}$ est la partie entière par excès de x. En notant $x_{1,n} \leq \ldots \leq x_{n,n}$ les valeurs observées $x_1, \ldots, x_n$ rangées par ordre croissant, la valeur observée de l'estimateur est donc $x_{\lceil n(1-\alpha)\rceil, n}$.

L'objectif de cette partie est de montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$, $\widehat{\mathrm{VaR}}_{n,\alpha}(X) \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathrm{VaR}_\alpha(X)$. Pour ce faire, on doit dans un premier temps démontrer un résultat connu sous le nom de *méthode de la transformée inverse.*

On note $U_{1,n} \leq \ldots \leq U_{n,n}$ les statistiques d'ordre associées à des variables aléatoires indépendantes $U_1, \ldots, U_n$ suivant chacune la loi uniforme sur $[0,1]$ (i.e. pour tout $i = 1, \ldots, n$, U_i est une variable aléatoire à densité de fonction densité $\mathbb{1}_{[0,1]}$).

II-5) *Méthode de la transformée inverse* : Montrer que $X_i \stackrel{\mathcal{L}}{=} F^{-1}(U_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Autrement dit, montrer que $F(x) = \mathbb{P}([F^{-1}(U_i) \leq x])$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Cette égalité en loi permet notamment de simuler n'importe qu'elle loi de probabilité à partir d'une simulation d'une loi uniforme sur $[0,1]$.

II-6) En déduire que $(X_1, \ldots, X_n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (F^{-1}(U_1), \ldots, F^{-1}(U_n))$.

On admettra pour la suite que l'égalité en loi de la question II-6) implique l'égalité en loi pour les statistiques d'ordre, i.e., que $X_{i,n} \stackrel{\mathcal{L}}{=} F^{-1}(U_{i,n})$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

On admettra également que pour tout $i = 1, \dots, n$

$$U_{i,n} \overset{\mathscr{L}}{=} \sum_{j=1}^{i} E_j \Big/ \sum_{j=1}^{n+1} E_j \,,$$

où $E_1, \dots, E_{n+1}$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle standard c'est-à-dire telles que pour tout $i = 1, \dots, n+1$,

$$\mathbb{P}([E_i \le x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \exp(-x) & \text{si } x \ge 0. \end{cases}$$

II-7) Calculer l'espérance d'une loi exponentielle standard.

II-8) Quelle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ doit-on prendre pour que $U_{\lceil n(1-\alpha)\rceil,n} \overset{\mathscr{L}}{=} u_n S_n / T_n$ avec

$$S_n = \frac{1}{\lceil n(1-\alpha)\rceil} \sum_{j=1}^{\lceil n(1-\alpha)\rceil} E_j \text{ et } T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} E_j$$

II-9) Montrer que $\lceil n(1-\alpha)\rceil \to \infty$ et $u_n \to 1-\alpha$ lorsque $n \to \infty$. Pour ce faire, vous pourrez utiliser le fait que $\lceil n(1-\alpha)\rceil - n(1-\alpha) \in [0,1[$.

II-10) En utilisant un résultat donné en début d'énoncé ainsi que les réponses aux questions précédentes, montrer que $S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ et $T_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.

On déduit facilement des questions II-8) à II-10) que $U_{\lceil n(1-\alpha)\rceil,n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1-\alpha$.

II-11) En déduire que $\widehat{\mathrm{VaR}}_{n,\alpha}(X) \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathrm{VaR}_\alpha(X)$.

Partie III – Value-at-Risk et Tail-VaR

A ce stade, nous avons défini les deux mesures de risque (Value-at-Risk et Tail-VaR) uniquement pour des variables aléatoires $X \in \mathscr{X}$ dont la fonction de répartition $F(\cdot) = \mathbb{P}([X \le \cdot])$ est bijective (de $I \subset \mathbb{R}$ dans $]0,1[$). Nous allons dans cette partie généraliser ces définitions au cas d'une fonction de répartition quelconque. La fonction F n'étant plus nécessairement bijective, la définition de la Value-at-Risk utilisée jusqu'à présent n'a plus de sens, la bijection réciproque F^{-1} n'existant pas forcément. On propose alors de remplacer dans la définition de la Value-at-Risk F^{-1} par l'inverse généralisée $F^{\leftarrow}$ de F. Plus précisément, pour une variable aléatoire $X \in \mathscr{X}$ de fonction de répartition F quelconque, la Value-at-Risk au niveau $\alpha \in]0,1[$ est donnée par

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = F^{\leftarrow}(1-\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \ge 1-\alpha\}.$$

On remarque facilement que $\mathbb{P}([X \le \mathrm{VaR}_\alpha(X)]) \ge 1-\alpha$. On a ainsi une confiance supérieure à $(1-\alpha)\%$ que la perte du portefeuille n'excède pas la valeur $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$.

L'objectif des questions suivantes est de démontrer quelques propriétés de la Value-at-Risk.

III-1) Montrer que si F est bijective de I dans $]0,1[$ alors $F^{\leftarrow}(1-\alpha) = F^{-1}(1-\alpha)$.

III-2) Pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ et $X \in \mathscr{X}$, montrer que $\mathrm{VaR}_\alpha(\lambda X + m) = \lambda \mathrm{VaR}_\alpha(X) + m$ pour tout $\alpha \in]0,1[$.

On rappelle que la Tail-VaR au niveau α est définie pour tout $X \in \mathscr{X}_1 = \{X \in \mathscr{X} \mid \mathbb{E}(|X|) < \infty\}$ par

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \mathrm{VaR}_s(X)\,ds.$$

L'objectif des questions III-3) à III-7) est de s'assurer que la Tail-VaR est bien défini pour tout $X \in \mathscr{X}_1$ c'est-à-dire que pour tout $\alpha \in]0,1[$ et $X \in \mathscr{X}_1$,

$$\int_0^\alpha |\mathrm{VaR}_s(X)|\,ds < \infty. \tag{1}$$

III-3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0,1[$ tels que $F^{\leftarrow}(y) \le x$ on a $y \le F(x)$.

III-4) Réciproquement, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0,1[$ tels que $y \le F(x)$ on a $F^{\leftarrow}(y) \le x$. En déduire que $\{y \in \mathbb{R} \mid F^{\leftarrow}(y) \le x\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \le F(x)\}$.

III-5) Soit U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Utiliser le résultat de la question précédente pour montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[F^{\leftarrow}(U) \le x] = [U \le F(x)]$. En déduire que $F^{\leftarrow}(U) \overset{\mathscr{L}}{=} X$.

III-6) Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$,

$$\int_0^\alpha |\mathrm{VaR}_s(X)|\,ds \le \mathbb{E}(|F^{\leftarrow}(U)|),$$

où est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

III-7) En utilisant l'égalité en loi $F^{\leftarrow}(U) \overset{\mathscr{L}}{=} X$, montrer que l'assertion (1) est vraie pour tout $X \in \mathscr{X}_1$ (aide : si $X \overset{\mathscr{L}}{=} Y$, $\mathbb{E}(|X|) = \mathbb{E}(|Y|)$).

III-8) En utilisant les résultats des questions III-2-c) et III-3), montrer que si $Y \le Z$ alors $\mathrm{TVaR}_\alpha(Y) \le \mathrm{TVaR}_\alpha(Z)$.

Montrer également que pour tout $m \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, $\mathrm{TVaR}_\alpha(\lambda X + m) = \lambda \mathrm{TVaR}_\alpha(X) + m$.