Banque PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l’épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d’énoncé, d’une part il le signale au chef de salle, d’autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu’il est amené à prendre.

L’usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l’orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l’appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s’ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Le sujet est composé de 4 parties. La troisième et la quatrième partie sont indépendantes entre elles et indépendantes du reste du sujet.

À rendre en fin d’épreuve avec la copie une feuille de papier millimétré

Tournez la page S.V.P.

Notations.

Dans tout le sujet, l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$.
On note E, l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et F, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.
Pour toute fonction f de E, on note ∇f son gradient.
On définit la fonction φ sur E par :

$$\forall f \in E,\, \varphi(f) = \nabla f.$$

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$, on définit la fonction $\phi_{\vec{u}}$ par

$$\forall f \in E,\, \phi_{\vec{u}}(f) = \vec{u}\cdot\varphi(f) \text{ (produit scalaire de } \vec{u} \text{ et } \varphi(f)).$$

Première Partie.

1. Démontrer que φ est une application linéaire à valeurs dans F.
2. Déterminer le noyau de φ. Qu'en déduit-on pour φ ?
3. (a) Enoncer le théorème de Schwarz pour les fonctions à plusieurs variables.
   (b) Soit $V : (x,y,z) \mapsto (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ appartenant à l'image de φ. Démontrer que :
   $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$
4. On pose, pour tout $(x,\, y\, z)$ de $\mathbb{R}^3$, $V(x,y,z) = (1+y^2+y^2z^2,\, xy(1+z^2),\, xy^2z)$.
   (a) Justifier qu'il n'existe pas de fonction f telle que $\nabla f = V$. Qu'en déduit-on pour la fonction φ ?
   (b) Déterminer toutes les fonctions f telles que $\forall(x,\, y\, z) \in \mathbb{R}^3$, $\nabla f(x,y,z) = x\, V(x,y,z)$.

Deuxième Partie.

Soient f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 les fonctions de E définies par :

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad \begin{array}{ll} f_1(x,y,z) = \cos(x), & f_2(x,y,z) = \sin(x), \\ f_3(x,y,z) = y\cos(x), & f_4(x,y,z) = y\sin(x), \\ f_5(x,y,z) = z\cos(x), & f_6(x,y,z) = z\sin(x). \end{array}$$

On considère alors l'espace vectoriel G engendré par les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6.
Dans cette partie, $\vec{u}$ désigne le vecteur $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ et ϕ_1 est la restriction de la fonction $\phi_{\vec{u}}$ à G.

1. Démontrer que $(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4,\, f_5,\, f_6)$ est une base notée $\mathcal{B}$ de G.
2. Démontrer que ϕ_1 est un endomorphisme de G.
3. (a) Déterminer la matrice A de ϕ_1 dans la base $\mathcal{B}$, puis calculer A^2.
   (b) Sans calcul, donner les valeurs propres de A^2 et dire si A^2 est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Qu'en est-il de A ?
   (c) De quelle(s) équation(s) aux dérivées partielles les vecteurs propres de $\phi_1^2 = \phi_1 \circ \phi_1$ sont-ils solutions ?
   (d) Déterminer l'ensemble des fonctions f solutions de l'équation $\phi_1^2(f) + f = 0$

Troisième Partie.

Dans cette partie, $\vec{u}$ désigne toujours le vecteur $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.
Soit f une fonction non nulle de E. On note S la surface d'équation $f(x,y,z)=0$. On suppose que les fonctions f choisies dans la suite sont telles que la surface S est non vide et qu'au moins un point de S est régulier.
Nous allons nous intéresser à quelques fonctions f de E telles que en tout point régulier M de S, le vecteur normal au plan tangent à S en M est orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

1. (a) Donner la définition d'un point régulier M_0 de S puis donner une équation du plan tangent à S en ce point M_0. On notera $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ les coordonnées de M_0.
   (b) Lorsque f est définie par $\forall(x,\, y,\, z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,\, y,\, z)=x^2+2y^2-z^2-2$ et M_0 est le point de coordonnées $(1,\, -1,\, 1)$, donner une équation du plan tangent à S au point M_0. Cette fonction f répond-t-elle au problème ?
2. (a) Soit F_1 la fonction définie par $\forall(x,\, y,\, z)\in\mathbb{R}^3,\ F_1(x,\, y,\, z)=(y-z)^2-\alpha$ où $\alpha\in\mathbb{R}^{+\star}$. La fonction $f=F_1$ répond-elle au problème ? Décrire la surface associée.
   (b) Soit g une fonction non nulle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Vérifier que la fonction f, définie par $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=g(x-y,x-z)$ répond au problème.
   (c) La fonction F_1 est-elle de la forme précédente ?
3. Soit S la surface réglée engendrée par les droites dirigées par le vecteur $\vec{u}$ et passant par un point du cercle Γ, inclus dans le plan d'équation $z=0$, de centre O et de rayon 1.
   (a) Sans calcul, justifier que la normale au plan tangent en tout point régulier de S est orthogonale au vecteur $\vec{u}$.
   (b) Démontrer qu'une équation cartésienne de S est : $(x-z)^2+(y-z)^2=1$.
   (c) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection de S avec le plan Π_a d'équation $z=a$ où $a\in\mathbb{R}$.
   (d) La réponse à la question précédente permet-elle de dire que S est une surface de révolution ? Justifier soigneusement la réponse.
   (e) Soit $\Gamma_1=S\cap\Pi$ où Π est le plan d'équation $x+y+z=0$.
   On considère les vecteurs $\vec{e}_3=\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{e}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{k}-\vec{i})$ et $\vec{e}_2=\vec{e}_3\wedge\vec{e}_1$. On note P la matrice de passage de $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ à $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.
      i. Sans calcul, donner la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à P. On ne demande pas les éléments caractéristiques.
      ii. Démontrer qu'un système d'équations de la courbe Γ_1 dans le repère $(O\,;\,\vec{e}_1,\,\vec{e}_2,\,\vec{e}_3)$ est $\begin{cases}5X^2+2\sqrt{3}XY+3Y^2=2\\ Z=0\end{cases}$ où (X,Y,Z) désignent les coordonnées d'un point M dans le repère $(O\,;\,\vec{e}_1,\,\vec{e}_2,\,\vec{e}_3)$.
      iii. Faire rapidement l'étude de Γ_1 et préciser sa nature.
      iv. Tracer Γ_1 dans le repère $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ sur la feuille de papier millimétré fournie. On prendra une unité égale à 6cm.

Quatrième partie.

Dans cette partie, $\vec{u}$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^3$ égal à $2\vec{i} + \vec{j}$.

1. Déterminer tous les plans P dont la normale est orthogonale au vecteur $\vec{u}$. On donnera une équation cartésienne de ces plans.

Dans la suite de cette partie, g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et S est la surface d'équation $z = g(x, y)$.
L'objectif de cette partie est de déterminer les fonctions g telles que en tout point régulier de S, la normale à S est orthogonale au vecteur $\vec{u}$ puis on s'intéressera à l'une de ces fonctions en particulier.

2. Démontrer que tous les points de S sont réguliers.
3. Démontrer que si h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors la fonction g définie par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = h(x - 2y)$ est solution du problème.
4. (a) Démontrer que si une fonction g répond au problème alors g est solution de l'équation aux dérivées partielles :
$$(Eq_1) : 2\,\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$
   (b) On considère la fonction δ définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \delta(x, y) = (x_1, y_1) = (x - 2y, y).$$
   Démontrer que δ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Justifier que δ et δ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (c) Soit g une solution au problème posé. Justifiez qu'il existe une fonction g_1 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $g = g_1 \circ \delta$.
   (d) Calculer les dérivées partielles de g en fonction de celles de g_1.
   (e) Démontrer que g est solution de (Eq_1) si et seulement si g_1 est solution d'une équation aux dérivées partielles simple (Eq_2) à préciser.
   (f) Résoudre (Eq_2).
   (g) A l'aide des questions précédentes, en particulier la question (c), en déduire les solutions de (Eq_1).
5. Dans cette question, g est la fonction définie par :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x, y) = (x - 2y)^3 - 3(x^2 + 4y^2 - 4xy) + 2.$$
   (a) Cette fonction g répond-elle au problème proposé dans cette partie ?
   (b) Démontrer que la surface S est une surface réglée et que ses génératrices sont toutes parallèles.
   (c) Déterminer les coordonnées des points M de S en lesquels le plan tangent à S est horizontal (c'est à dire parallèle au plan d'équation $z = 0$).
   (d) Soit $a \in \mathbb{R}$ et M le point de S de coordonnées $(2a + 2, a, -2)$. Déterminer la position relative de S et du plan tangent à S en M au voisinage de M.

Les surfaces rencontrées dans ce sujet sont toutes des cylindres, c'est à dire une surface engendrée par une famille de droites toutes parallèles (et dirigées par le vecteur $\vec{u}$). L'intersection de cette surface avec un plan perpendiculaire aux génératrices - comme Γ_1 - s'appelle une base (ou section) droite du cylindre.

Fin de l'épreuve

IMPRIMERIE NATIONALE – 20 1097 – D'après documents fournis