Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

L'épreuve était composée d'un problème d'algèbre linéaire, divisé en quatre parties indépendantes, qui portait principalement sur l'étude de matrices orthogonales et des isométries associées, et d'un exercice de probabilités.

Les trois premières parties du problème d'algègre linéaire comportaient des questions très classiques que tout étudiant de CPGE a dû faire des dizaines de fois. Nous nous attendions à ce que la majorité de ces questions soient traitées correctement par beaucoup de candidats, cela n'a malheureusement pas été le cas avec beaucoup de copies dont la vacuité ou l'ineptie sont particulièment inquiétantes. La dernière partie du problème ou l'exercice de probabilités étaient de difficulté supérieure afin de valoriser les tout meilleurs candidats.

Problème d'algèbre linéaire

L'objectif principal de ce problème était de démontrer que l'ensemble des réflexions de $\mathbb{R}^d$ engendre le groupe des isométries. ce point était l'objet de la toute dernière partie, les trois premières parties étant consacrées à l'étude de cas particuliers.

Partie I.

Le but de cette partie était l'identification d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite dans un espace de dimension 3 à partir de sa matrice dans une base (non adaptée). Il s'agissait donc de vérifier que la matrice était bien orthogonale, de diagonaliser cette matrice puis d'identifier l'isométrie en question. Les candidats étaient largement guidés dans cette étude afin en particulier d'éviter des calculs fastidieux.

1. Dans un premier temps, il faut vérifier que la matrice est orthogonale. Cela nécessite malheureusement de connaître la définition de cette notion, ce qui semble déjà une tâche insurmontable pour beaucoup de candidats ! Comment peut-on espérer réussir à traiter quoi que ce soit si les définitions de base ne sont pas maîtrisées ?

2. Nous demandions dans cette question de trouver les éléments propres de la matrice (valeurs propres, sous-espaces propres) en faisant tout d'abord remarquer que la matrice était diagonalisable car symétrique, que ses valeurs propres étaient -1 ou 1 car orthogonale et que ses sous-espaces propres étaient orthogonaux entre eux.

   Il s'agit d'une question très standard que tout candidat est censé savoir faire sans aucun problème. Elle a pourtant déjà été très sélective avec de nombreux candidats n'étant pas capables d'obtenir les sous-espaces propres à la fin. Mentionnons, outre les nombreuses erreurs de calcul dans la résolution de systèmes linéaires, les fautes les plus courantes :

   - $\rightsquigarrow$ Un polynôme caractéristique scindé ne suffit pas à dire que la matrice est diagonalisable.

   - $\rightsquigarrow$ Il faut faire attention aux objets manipulés ! Des sous-espaces propres ne constituent pas une base !

   - $\rightsquigarrow$ Si la matrice est inversible, 0 ne peut pas être valeur propre.

   - $\rightsquigarrow$ Inutile de calculer le polynôme caractéristique quand on sait déjà que les seules valeurs propres possibles sont 1 et -1.

3. Enfin, il fallait identifier l'isométrie associée à la matrice initiale. La description des isométries du plan et de l'espace à partir de leurs éléments propres sont explicitement au programme. Nous attendons donc à obtenir la nature de l'isométrie (rotation, symétrie,...) ainsi que ses caractéristiques (plan de symétrie, axe de la rotation, angle de la rotation,...). Peu de candidats sont en mesure d'extraire ces informations à partir de la diagonalisation précédente.

Partie II

Le but de cette partie était de montrer qu'une involution était toujours diagonalisable (sans utiliser les polynômes annulateurs) et qu'il s'agissait d'une isométrie si et seulement si les sous-espaces propres étaient orthogonaux.

Le début de la partie a plutôt été bien traité (même si la rédaction pour montrer que l'application était bijective laisse parfois à désirer). La décomposition d'un vecteur quelconque comme somme d'un vecteur propre associé à 1 et d'un vecteur propre associé à -1 (décomposition donnée) a donné satisfaction. Le fait que les 2 sous-espaces propres étaient en somme directe a été raisonnablement traité même si certains affirment sans démonstration que la décomposition est unique ou que les dimensions de ces sous-espaces se somment à n. Le fait que ces sous-espaces soient supplémentaires entraîne la diagonalisibilité de l'application est également connu.

En revanche, démontrer l'équivalence finale a été très difficile, beaucoup de candidats semblant incapables de mener à bien un raisonnement rigoureux.

Partie III

Nous considérions ici un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ (de dimension 2) pour étudier la symétrie orthogonale par rapport à F. Enfin, il fallait écrire cette symétrie comme composée de deux réflexions.

1. Dans un premier temps, nous demandions de vérifier que F était un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Question basique qui consitue l'un des premiers exercices sur les espaces vectoriels en première année. Quelle ne fut pas notre surprise de constater que cette question a posé pas mal de problème à nombre de candidats ! Nous ne pouvons même pas incriminer la crise du COVID-19 puisqu'il s'agit d'un thème abordé l'année précédente. Là encore beaucoup de confusion entre espace vectoriel, application linéaire,... Les objets manipulés ne sont pas du tout maîtrisés.

   Signalons aussi qu'affirmer que l'ensemble est stable par combinaison linéaire ne suffit pas, il faut le vérifier.

2. Nous cherchions ensuite une base orthonormée de F puis de $F^\perp$, un premier vecteur pour chaque sous-espace étant donné. Là aussi, beaucoup de mauvaises réponses : bien souvent, le deuxième vecteur de la base de F était pris orthogonal au premier mais n'appartenait pas à l'ensemble F. Pour montrer qu'un vecteur appartenait à $F^\perp$, seule l'orthogonalité par rapport au 1er vecteur de la base de F était vérifiée. Signalons aussi une confusion très fréquente entre orthogonal de F et complémentaire.

3. Nous demandions d'écrire la matrice de la symétrie orthogonale dans la base canonique. Cette question a été très difficile, avec déjà une confusion étonnante entre la matrice de passage vers la base précédemment obtenue et la matrice de la symétrie. Très peu de candidats ont écrit la matrice de la symétrie dans la base de diagonalisation obtenue à la question précédente, et encore moins ont mené les calculs de changement de base à terme.

4. La dernière question consistait (à partir de la matrice diagonale) à écrire la symétrie comme composée de deux réflexions. Bien que peu difficile, cette question n'était pas guidée et a donc été très peu traitée par les candidats (fallait-il déjà avoir obtenu

la matrice en question).

Partie IV

Cette partie était plus abstraite bien que largement guidée. Il s'agissait de démontrer que, dans un espace de dimension finie n, toute isométrie pouvait s'écrire comme composée de réflexions, et que le nombre de réflexions nécessaires était inférieur à la co-dimension du sous-espace des vecteurs fixes. La démonstration s'effectue par récurrence sur cette co-dimension.

Cette partie était plus délicate car moins calculatoire que les précédentes et demandait d'être capable de mener des raisonnements mathématiques abstraits. Même si les arguments attendus étaient très simples, la rédaction et la rigueur mathématique de la plupart des candidats ne permettent pas de répondre de manière satisfaisante à ce genre de questions. Les notions d'hypothèse, de conclusion ou d'implication semblent très floues pour beaucoup.

Signalons également que la relation

$$\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$$

n'est pas le théorème du rang. Même si nous n'avons pas sanctionné cette confusion, cela reste très désagréable à lire.

Exercice de probabilités

Le but de cet exercice était d'obtenir la probabilité pour que dans un jeu de pile ou face (non équilibré), le joueur n'obtienne jamais une fortune positive. Il s'agissait d'un exercice délicat car nécessitant de manipuler de faọn fine le formalisme probabiliste et les événements pour obtenir la propriété de Markov pour une marche aléatoire. Néanmoins, cette partie pouvait être admise, le reste de l'exercice restant tout à fait abordable pour les étudiants de PT.

Les probabilités semblent rester une difficulté pour beaucoup de candidats avec d'énormes confusions entre variables aléatoires, valeurs prises par la variable et probabilité d'obtenir telle valeur.

1. Lorsque l'on demande la loi d'une variable aléatoire, on attend :

   $\rightsquigarrow$ L'ensemble des valeurs possibles prises par cette variable.

$\rightsquigarrow$ La probabilité d'obtenir chaque valeur.

Toute autre réponse sera forcément fausse (éventuellement, on peut attendre une loi connue, mais dans ce cas, il convient de justifier sa réponse). Précisons aussi que, même s'il n'y a que deux résultats possibles, les probabilités d'obtenir chaque résultat ne sont pas forcément $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$.

2. Nous demandions ici une relation entre les résultats des différents lancers et la fortune du joueur. Cette relation était explicite et ne devait pas donner lieu à je ne sais quelle dissertation ou démonstration par récurrence totalement fausse. Signalons également que calculer le noyau d'une application pour montrer qu'elle est injective ne marche que pour les applications linéaires.

3. Cette question demandait l'écriture explicite de certains événements. Là encore, inutile de partir dans des digressions vaseuses, une écriture précise en termes mathématiques des événements considérés était attendue et seuls quelques très bons candidats sont parvenus à les écrire. Précisons aussi une erreur très récurrente : l'égalité
$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$$
est vraie si X et Y ont même loi. Cela n'a en revanche rien à voir avec l'indépendance (prendre par exemple $X = Y$ pour s'en convaincre).

   La toute dernière question, qui demandait juste d'expliquer pourquoi les événements considérés étaient impossibles, a en revanche été très bien traitée. L'intuition qu'il y a derrière ces calculs de probabilité semble donc être abordable par beaucoup de candidats, mais ce n'est visiblement pas le cas du formalisme.

4. Nous demandions ensuite d'obtenir une relation de récurrence sur certaines probabilités d'événements en utilisant la formule des probabilités totales (indication donnée). Beaucoup de candidats avaient déjà jeté l'éponge à ce moment là mais cette formule des probabilités totales semble maîtrisée par les candidats capables de manipuler un peu ces notions de probabilité.

5. A partir de la formule de récurrence précédente, nous demandions d'obtenir une équation fonctionnelle pour la fonction génératrice associée. Un nombre non négligeable de candidats connait la formule du produit de Cauchy pour les séries entières même si le traitement des termes de bord laisse parfois à désirer.

6. Il fallait ensuite résoudre l'équation fonctionnelle précédente (équation polynômiale d'ordre 2). Seuls quelques candidats ont abordés cette question, même si la sélection de la bonne racine au final a posé beaucoup de problèmes.

Attention, une série entière évaluée en 0 ne vaut pas toujours 0, il reste toujours le terme constant.