Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Remarques générales

Le sujet avait pour fil directeur le calcul de la constante de Kepler-Bouwkamp :

$$\prod_{k=3}^{+\infty} \cos \frac{\pi}{k}$$

Après un Préambule où il était demandé aux candidats de rappeler l'énoncé de la formule de Taylor-Young, la première partie mettait en jeu une approximation de Padé, qui était l'occasion de faire réaliser l'étude d'une fonction rationnelle paire, et de comparer son développement en série entière avec celui de la fonction cosinus. La seconde partie proposait la résolution d'une équation fonctionnelle, occasion cette fois-ci de faire manipuler et étudier des suites et des séries numériques. Enfin, une troisième partie, avec des questions plus difficiles, faisait le lien entre la fonction Gamma et la fonction sinus, par la formule dite « de réflexion ».

Le sujet comportait, comme l'an dernier, des questions de cours, et des questions faciles, accessibles, ce qui a permis aux candidats de répondre à un nombre important de questions.
A côté, comme l'an dernier, d'autres questions étaient destinées à valoriser les candidats soigneux et rigoureux ; d'autres, plus difficiles, à départager les très bons candidats.

La situation exceptionnelle cette année, avec le confinement et le décalage dans le temps des épreuves, ne semble pas avoir impacté négativement les candidats : dans l'ensemble, le sujet plutôt bien réussi : les mois de révision supplémentaires ont été bénéfiques. Il reste bien sûr toujours quelques erreurs classiques, mais moins que d'habitude.

Il apparaît que, pour de nombreux candidats, l'équivalence et la négligeabilité sont très mal maîtrisées. Il n'est pas rare de voir des sommes d'équivalents, ou des différences d'équivalents qui s'annulent, sans que le candidat pense à effectuer un développement limité à un ordre supérieur.

D'autre part, les candidats devraient faire attention à ne pas écrire « par définition » lorsque c'est une propriété qui est en jeu.

Comme l'an dernier, l'orthographe n'est toujours pas maîtrisée, les participes passés sont souvent à l'infinitif, et les verbes « résoudre », « conclure » sont mal conjugués. La terminologie mathématique usuelle est également malmenée :

« voisinnage » ;
« f est définit » ;
« on a montrer » ;
« réccurence » ;
« l'intégral » ;
« la fonction est pair » ;
« Reiman » ;
« le therme » ;
« un interval » .

Comme l'an passé, nous souhaitons faire quelques rappels de bon sens :

i. Il faut produire un raisonnement : recopier le résultat de la question n'est pas une preuve. Si le résultat attendu est donné dans l'énoncé, il faut prêter une attention particulière à la rédaction de la solution.

ii. Certains candidats manquent d'honnêteté intellectuelle en essayant de tromper le correcteur, effectuant un calcul manifestement faux mais en concluant avoir répondu. Chez certains, c'est même systématique. Dans ce cas la copie est pénalisée.

Remarques particulières

Préambule

1. Cette question n'a pas été traitée correctement par les candidats. Beaucoup confondent la formule de Taylor-Young avec la formule de Taylor avec reste intégral. D'autre part, l'énoncé était extrêmement précis, en indiquant les notations : beaucoup de candidats ne les respectent pas.

   Nous signalons aussi que, trop souvent, la formule est énoncée pour tout x de I, le terme de reste en « o » est omis, ou alors, les candidats donnent un terme de la forme « $o(x^n)$ », ou ne font pas attention qu'on est à l'ordre n, et confondent l'indice muet de la somme avec celui du reste : « $o((x-a)^k)$ ».

2. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Nous rappelons que si le développement est demandé à l'ordre 2, il ne faut pas le donner à l'ordre 3, 4, ou $2\,n$.

Partie I

1. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Nous signalons que certains candidats, qui ont bien montré que, pour tout réel x, $\phi(-x) = \phi(x)$, oublient de conclure que la fonction est paire. D'autre part, affirmer que $\phi(-x) = \phi(x)$ est bien mais le justifier un minimum est mieux. Enfin, certains confondent la fonction et sa représentation graphique : ce n'est pas ϕ qui est symétrique.

2. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Quelques candidats prennent le quotient sans vérifier que le dénominateur ne s'annule pas. D'autres encore partent d'une égalité entre $\phi(x)$ et $\psi(x)$ pour montrer que c'est toujours vérifié ...
   Et trop souvent, il manque une simple phrase de conclusion ...

3. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Mais très peu de candidats justifient que la fonction est dérivable. Certains candidats auraient pu détecter leurs erreurs de calcul : la dérivée d'une fonction paire est toujours une fonction impaire.

4. Le tableau de variations de la fonction ϕ sur $\mathbb{R}$ a en général été correctement donné. Concernant le calcul des limites, nous avons trouvé de nombreuses ratures, de nombreuses erreurs. Certains candidats donnent des limites aberrantes aux bornes du domaine, en complète contradiction avec la courbe qu'ils tracent ensuite.

5. Très peu de candidats ont donné le développement en série entière de la fonction ϕ. Pour ceux qui l'ont fait, si la formule est souvent correcte, c'est le rayon de convergence qui est erroné. Beaucoup de candidats affirment que la fonction est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, ou alors, sur $]-1,1[$. Sinon, quelques candidats utilisent la formule donnant le développement en série entière de

$$u \mapsto \frac{1}{1-u}$$

   mais avec $u = \dfrac{12}{x^2}$.

6. En ce qui concerne la représentation graphique telle que demandée par l'énoncé, en particulier, l'échelle demandée de 3 cm pour une unité. Beaucoup de candidats pensent que $\cos(\pi) = 0$, certains candidats tracent une courbe en contradiction avec leur tableau de variations. Beaucoup de tracés sont aussi constitués de segments

rectilignes, y compris pour la fonction cosinus ...

Concernant l'interprétation, rares sont les candidats à expliciter le développement à l'ordre 2 de ϕ. Le développement de ϕ en série entière, lorsqu'il a correctement été obtenu dans la question 5, est en effet très rarement utilisé. Le fait que le développement en série entière de ϕ ne comporte que des termes d'indice pair est très insuffisant pour justifier la superposition des courbes au voisinage de 0.

Enfin, nous rappelons que lorsqu'il y a deux courbes sur la même figure, il faut préciser quelle courbe correspond à la représentation de telle ou telle fonction.

Partie II

1. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Il reste quand même des candidats qui ignorent cette formule.

2. De nombreux candidats ne savent pas rédiger un raisonnement par récurrence : il faut commencer par faire attention au rang en jeu lors de l'initialisation (1 ici, et non zéro comme nous l'avons trouvé sur de nombreuses copies). Ensuite, donner une propriété « $P(n)$ » qui ne dépend pas de n, la supposer vraie pour tout n lors de l'hérédité, ou encore (plus inquiétant) une hérédité prouvée en montrant que si la propriété est vraie au rang $n+1$, alors elle est vraie au rang n, ou, très inquiétant toujours, changeant d'indice $m = n + 1$ ...

   On attend beaucoup de soin dans la présentation de la récurrence : la propriété $P(n)$ doit être clairement exprimée, la conclusion également (éviter les phrases du genre « la récurrence s'enclenche »)

   Enfin, plus préoccupant, des candidats ont une récurrence sur x.

3. Dans cette question, bien que le raisonnement soit similaire à celui de la question précédente, il fallait détailler un minimum l'argument, et faire attention à ne pas diviser par 0. Les candidats peinent parfois à justifier leur réponse. D'autre part, beaucoup de candidats adoptent des démarches excessivement compliquées, avec des multiplications et divisions inutiles, manipulées sans aucune rigueur.

4. Cette question était facile, mais a été mal réussie car de nombreux candidats divisent/simplifient par le produit des cosinus sans vérifier qu'il ne s'annule pas.

5. Dans cette question, la réponse attendue était $h(0) = 1$, et non $h(x)\dfrac{\pi x}{\sin \pi x}$.
   Là encore, de nombreux candidats ne font pas attention qu'il ne faut pas diviser

par 0. Enfin, très peu de candidats justifient la limite par la continuité en 0 de la fonction h. Il convient de se souvenir de la caractérisation séquentielle de la continuité.

6. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. On rappelle là encore qu'il ne faut pas oublier de donner un minimum de justifications.

7. Cette question n'a été que peu souvent bien traitée. Certains candidats manquent de recul : en trouvant $h(x) = 1$, l'égalité demandée est-elle vérifiée ? Il n'est pas rare dans les copies de trouver la réponse $\forall\, x \in \mathbb{R}, h(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$, alors que cette dernière expression n'est pas définie en 0. Par ailleurs, peu de candidats pensent à vérifier la continuité en 0.

Partie III

1. Cette question n'a été correctement traitée que par peu de candidats. Il était naturel de chercher un développement asymptotique du terme général de la série : nous avons relevé de très nombreuses erreurs venant du développement limité incorrect de la fonction cosinus, de nombreuses copies omettant le facteur $-\dfrac{1}{2}$ devant le terme en $\dfrac{\pi}{(n+1)^2}$, ou alors, écrivant des équivalences entre $\dfrac{\pi}{2\,(n+1)^2}$ et $\dfrac{1}{(n+1)^2}$ ou $\dfrac{1}{n^2}$.

   Nous rappelons que l'on ne peut pas composer des équivalents par une fonction : il fallait garder la formule avec le terme en o, puis prendre le logarithme. De plus, le critère d'équivalence des séries fonctionne pour celles de signe constant. Pour de trop nombreux candidats, $\ln(\cos x)$ est positif. De trop nombreux candidats écrivent que si $\lim u_n$ existe, ou alors vaut zéro, alors la série de terme général u_n converge. Plusieurs candidats écrivent que « $\cos \dfrac{\pi}{n}$ est continue ». Certains parviennent à trouver un rayon de convergence, alors que ce n'est pas une série entière. Plusieurs écrivent, après avoir montré que $u_n < 0$, que la série converge par comparaison avec la série nulle. Certains candidats, voulant trop en faire, utilisent l'écriture complexe du cosinus et mettent des nombres complexes dans des logarithmes.

   D'autres encore veulent appliquer le critère de d'Alembert, inefficace ici. Il est effrayant de voir certaines erreurs concernant le logarithme.

2. (a) Cette question n'a pas toujours été correctement traitée. Les candidats confondent

l'indice de sommation en jeu dans les sommes partielles $\sum_{k=3}^{n} \ldots$, avec l'entier n, ce qui les conduit ensuite à des résultats complètement erronés, par exemple $(n+3)\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$.

D'autre part, si l'on demande de calculer de deux façons différentes, c'est qu'il y a une raison ... Ainsi, il n'est pas très utile que les deux façons donnent le même résultat.

Enfin, les candidats ont souvent trouvé le même résultat par deux moyens différents, alors que l'idée était de trouver deux formules distinctes pour la même somme partielle.

Sinon, nous avons relevé des erreurs dans la sommes télescopique, avec R_4 au lieu de R_3.

(b) Cette question n'a pas toujours été correctement traitée. Nous rappelons qu'une suite majorée par 0 n'est pas nécessairement convergente, et si $u_{n+1} - u_n \to 0$, on ne peut pas conclure que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ converge. Une série convergente ne signifie pas que la limite du terme général est nulle.

Les candidats doivent aussi faire attention au vocabulaire. Parmi les propositions lues cette année, nous avons vu des ≪ par télescopie ≫, et même une ≪ somme stoechiométrique ≫.

(c) Beaucoup de candidats ne font pas le lien avec les questions précédentes. Certain ont tout de même bien répondu à la question en majorant le produit partiel par le produit des terms d'une une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1. Cependant, de nombreux candidats ont inventé des théorèmes pour justifier la convergence. Pour cette question, certains candidats prouvent le résultat (de façon convenable) en montrant que la suite est décroissante et minorée. Nous rappelons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout n n'implique que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante uniquement si la suite est positive.

D'autre part, un produit de termes de $]-1,1[$ ne donne pas nécessairement une suite convergente.

Enfin, le passage de la convergence de la suite $(\ln R_n)_{n\geq 2}$ à celle de la suite $(R_n)_{n\geq 2}$ est rarement justifié : parfois un argument est donné concernant la continuité ou la bijectivité de la fonction logarithme, mais c'est bien la continuité de l'exponentielle en $\ell = \lim \ln(R_n)$ qui est nécessaire.

(d) Cette question n'a été traitée que par peu de candidats. Certains pensent à utiliser la fonction ϕ de la première partie, mais peu indiquent que la ≪ méthode de calcul ≫ demandée consiste à effectuer un produit fini.

3. (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Certains semblent toutefois ignorer cette formule.

   (b) Comme la précédente, cette question a été traitée par la majorité des candidats, même si un nombre non négligeable de copies font la somme sur k des $(1-t)^n$. C'est dommage, il faut bien relire avant de rendre sa copie à la fin de l'épreuve.

   (c) Cette question n'a pas toujours été correctement traitée. Comme chaque année, on trouve des confusions entre la convergence de l'intégrale I_n et celle de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   D'autre part, pour écrire $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 (1-t)^k \underset{\cdot}{t}$, il faut avoir d'abord prouvé la convergence des intégrales. De nombreux candidats commencent le calcul avant d'avoir étudié la convergence. Enfin, nous rappelons que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ diverge ...

   (d) Cette question n'a pas non plus toujours été correctement traitée. Le résultat étant donné dans l'énoncé, il convient de bien soigner et justifier le calcul. Par exemple, de nombreux candidats oublient le signe moins dans leur primitive de $t \mapsto (1-t)^k$, mais ont par miracle le bon résultat à la fin. Il ne sert à rien d'essayer de tromper le correcteur lors de la réindexation de la somme. Certains candidats décident de faire un raisonnement par récurrence (inutile ici). Ils arrivent au résultat sans utiliser l'hypothèse de récurrence et ne s'en alarment pas.

   Enfin, un nombre sidérant de candidats dit que l'intégrale I_n diverge à la question précédente, mais font néanmoins le calcul à cette question. Ce manque de recul paraît vraiment grave pour de futurs ingénieurs.

4. (a) Cette question a en général été correctement traitée, même si on trouve beaucoup d'intégrations par parties inutiles.

   (b) Pour étudier la convergence de la série de terme général u_n, nous rappelons que l'on ne peut pas faire la somme d'équivalents, il faut là aussi repasser par des égalités avec les termes en o.

   Certains candidats utilisent le critère de d'Alembert, trouvent une limite égale à 1, et concluent en disant que la série est convergente. Beaucoup trop de candidats pensent que l'intégrale entre 0 et 1 de la fonction inverse, ou du carré de la fonction inverse, convergent. De manière générale, les exemples de Riemann au voisinage de 0 sont mal maîtrisés. Les comparaisons entre puissances de x, lorsque$x \in [0;1]$, sont souvent fausses.

   (c) Pour cette question, on demandait un minimum d'explications pour justifier que la somme $\displaystyle\sum_{k=11}^{n} \ln\frac{k+1}{k}$ était télescopique.

D'autre part, le fait que, lorsque l'entier n tend vers l'infini, $\ln(n+1) \sim \ln n$ n'est pas évident et l'avoir prouvé ne suffit par à conclure. Nous avons relevé beaucoup de tentatives d'arnaque dans le calcul de la somme partielle afin qu'elle coïncide avec la limite de l'énoncé. Beaucoup de candidats remplacent en effet $\ln(n+1)$ par $\ln n$. Le raisonnement proposé est le suivant : « puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$, et puisque $\ln n$ et $\ln(n+1)$ ont la même limite/sont équivalents, on a l'existence de γ ». Contre-exemple à ce raisonnement : $u_n = n, v_n = n$ sont les termes généraux respectifs de deux suites telles que $u_n - v_n$ admette une limite lorsque l'entier n tend vers l'infini. Si on remplace le terme général v_n par celui de la suite équivalente $w_n = n + (-1)^n$, la suite de terme général $u_n - w_n$ n'admet plus de limite.

Enfin, certains candidats écrivent la série sous la forme $\displaystyle\sum \frac{1}{n} - \sum \ln \frac{n+1}{n}$, ce qui n'est pas possible, puisque ce sont deux séries divergentes.

5. (a) Cette question n'a été correctement traitée que par peu de candidats. C'est très bien de redonner les théorèmes du cours, mais il faut ensuite les appliquer.

   Parmi les candidats (moins de la moitié) qui connaissaient le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, rares sont ceux qui ont effectivement vérifié les hypothèses. Beaucoup ont par exemple écrit que « pour tout x dans $\mathbb{R}_+^\star$ »la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est continue sur $[0, n]$.

   Pour l'hypothèse de domination, il ne suffit pas de dire que le module de la fonction est dominé par une fonction (indépendante de xd ?ailleurs), il faut aussi montrer que cette dernière fonction est intégrable.

   (b) Le calcul de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(1)$ n'a pas toujours été correctement fait. De nombreux candidats passent à la limite sous l'intégrale, sans aucune justification, alors qu'il fallait simplement calculer explicitement l'intégrale.

   (c) Cette question n'a pas toujours été correctement traitée. Ici aussi le résultat était donné dans l'énoncé, donc il fallait bien justifier les intégrations par parties.

   D'autre part, un raisonnement par récurrence n'est pas forcément nécessaire. Il fallait expliciter la première étape (dans l'idéal la seconde aussi pour justifier la dérivée de $t \mapsto \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n-1}$ et la dernière intégration.

   Enfin, nous rappelons que pour effectuer une intégration par parties, il faut justifier que les fonctions sont de classe C^1.

   (d) Cette question a été correctement traitée par une majorité des candidats.

(e) Dans cette question, nous avons relevé de nombreuses erreurs :

« $e^{\gamma x} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right) e^{-\ln n}$ », ou encore « $\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{k}{x}\right)^{-1} e^{\frac{k}{x}} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{k}{x}\right)^{-1} \prod_{k=1}^{+\infty} e^{\frac{k}{x}}$ ».

Peu de candidats ont compris que, comme pour les séries, il fallait repasser par les produits partiels puis passer à la limite.

(f) Nous rappelons que les produits et sommes « infinies » ne sont pas des produits et des sommes, mais des limites, comme cela figurait très explicitement dans l'énoncé : ainsi, on ne peut pas écrire $\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \dots\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \exp \dots$: il faut d'abord passer par les sommes et produits partiels, puis ensuite passer à la limite (en justifiant la limite par la continuité de l'exponentielle).

(g) Pour cette question, nous faisons les mêmes remarques que pour la question précédente.

On constate de nombreuses « arnaques » : des candidats commencent le calcul, n'arrivent pas à finir, mais encadrent quand même le résultat demandé.

Quelques excellentes copies ont su utiliser les questions précédentes.