Banque «Agro-Véto»
A BCPST - 0420

MATHÉMATIQUES

Méthodes de calcul et raisonnement

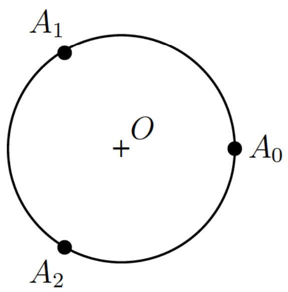
Durée : 2 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le surveillant qui contrôlera et, éventuellement, remplacera le sujet.
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce problème est constitué de trois parties. Dans la partie I, on démontre des résultats qui pourront être utilisés dans la partie II. La partie III est indépendante des deux autres

Dans la suite p est un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On considère un repère orthonormal du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et le cercle unité $\mathcal{C}$ sur lequel on place dans le sens trigonométrique p points équidistants A_0,..., A_{p-1} tels que A_0 soit d'affixe 1.
Ainsi pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, A_k est le point d'affixe $z_k = e^{2ik\pi/p}$.
Pour $p = 3$, on a la représentation suivante :



I. Résultats préliminaires

1. On considère la matrice $D_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

   (a) Inverser les matrices D_3 et D_4.

   (b) Prouver que la matrice D_p est inversible et donner son inverse.
   On pourra utiliser les résultats de la question précédente pour conjecturer l'inverse de D_p.

2. Soit $f : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^{p} x_k$.

   (a) Prouver que f est une application $\mathbb{C}$-linéaire.

   (b) La fonction f est-elle injective ?

   (c) La fonction f est-elle surjective ?

   (d) Déterminer la dimension du noyau de f.

3. Calculez $\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} z_k$. Interprétez géométriquement le résultat obtenu.

4. Soit z un complexe non nul. Prouver que : $z^p = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = e^{2ik\pi/p}$.
   On pourra mettre z sous forme exponentielle ou trigonométrique.

   On admettra que l'équation $z^p = 1$ possède p solutions distinctes : z_0, z_1,..., z_{p-1}.

II. Étude d'un modèle de diffusion sur le cercle

On considère l'expérience suivante : une particule est libre de se déplacer parmi les p points A_0, A_1,..., A_{p-1}. Initialement la particule se situe sur le point A_0 et, à chaque étape, on choisit de façon équiprobable de la déplacer vers l'un de ses deux plus proches voisins.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n la variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![0, p-1]\!]$ et telle que l'emplacement occupé à l'étape n soit A_{U_n}. La variable aléatoire U_0 est donc constante à 0 et la variable aléatoire U_1 est égale à 1 avec une probabilité 1/2 et à $p-1$ avec une probabilité 1/2. La variable U_2 est à valeurs dans $\{2, 0, p-2\}$ et $\mathbb{P}(U_2 = 2) = \mathbb{P}(U_2 = p-2) = 1/4$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(U_n = 0) \\ \mathbb{P}(U_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(U_n = p-1) \end{pmatrix}$.

5. Déterminer une matrice $M_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que, pour tout entier n, on ait
$$X_{n+1} = M_p X_n.$$
   Indication : une récurrence n'est pas nécessaire.

6. Soit n un entier. Donner sans justifications l'expression de X_n en fonction de la matrice M_p et de n.
7. Vérifier que $M_p = \dfrac{1}{2}\left(D_p + D_p^{-1}\right)$.
8. On suppose ici que $p = 3$ et on admet que $M_3 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Prouver que la matrice M_3 est diagonalisable et donner une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que $M_3 = PDP^{-1}$.
   (b) Déterminer P^{-1}.
   (c) Soit $k \in [\![0, 2]\!]$. Déterminer la limite de $\mathbb{P}(U_n = k)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Interprétez le résultat obtenu.

9. Déterminer les valeurs propres complexes de D_p et les espaces propres associés.
10. En déduire qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ inversible tel que

$$D_p = Q \begin{pmatrix} z_0 & 0 & 0 \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & z_{p-1} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

et que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, le sous-espace propre de D_p associé à la valeur propre z_k est inclus dans le noyau de f.

On suppose dans toute la suite du sujet, que **p est impair**.
Il existe donc un entier q non nul tel que $\mathbf{p = 2q + 1}$.

11. En déduire, en utilisant la question 7, que la matrice M_p est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
12. Prouver que 1 est valeur propre de M_p et que l'espace propre associé que l'on notera G_0 est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 dont on donnera une base.
13. Soit $k \in [\![1, q]\!]$. Prouver que $\cos(2k\pi/p)$ est valeur propre de M_p et que l'espace propre associé, que l'on notera G_k, est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 inclus dans le noyau de f.
14. Soit $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$.
   (a) Prouver qu'il existe un unique $(V_0, V_1, \cdots, V_q) \in G_0 \times G_1 \times \cdots \times G_q$ tel que
   $$V = \sum_{k=0}^{q} V_k.$$
   (b) Déterminer V_0 en fonction de $f(V)$ et de p.
15. (a) Soit $k \in [\![1, q]\!]$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(2k\pi/p)^n$.
   (b) En déduire, pour tout $\ell \in [\![0, p-1]\!]$, la limite de $\mathbb{P}(U_n = \ell)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) Interprétez le résultat obtenu.

III. Étude d'une variable aléatoire

16. On considère la fonction cotan qui à un réel x associe $\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
    (a) Déterminer l'ensemble de définition D de cotan.
    (b) En remarquant que pour tout $x \in D$, on a $\operatorname{cotan}(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, tracer, sans justifications, son graphe sur $[-2\pi, 2\pi] \cap D$.

Pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, on note B_k le point d'intersection de la droite (A_0A_k) avec la droite d'équation $x = -1$.

17. Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$, montrer que l'ordonnée de B_k est $2\operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{p}\right)$.

On considère une variable W_p suivant une loi uniforme sur $[\![1, p-1]\!]$ et on s'intéresse à la variable aléatoire $Z_p = 2\operatorname{cotan}\left(\dfrac{W_p\pi}{p}\right)$.

18. Calculer l'espérance de Z_3 et l'espérance de $|Z_3|$.
19. Déterminer l'espérance de Z_p.
    On pourra utiliser que pour tout $x \in D$, on a $\operatorname{cotan}(x) = -\operatorname{cotan}(\pi - x)$.

On s'intéresse à la somme $S_p = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=1}^{q} \operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{p}\right)$. On rappelle que $p = 2q + 1$.

20. Exprimer $E(|Z_p|)$ en fonction de S_p et de p.
21. La fonction cotangente est-elle intégrable sur $]0, \pi/2]$?
22. Soit $k \in [\![1, q]\!]$. En utilisant la monotonie de la fonction cotan sur $]0, \pi[$, montrer que l'on a :
$$\frac{\pi}{p}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{p}\right) \geq \int_{k\pi/p}^{(k+1)\pi/p} \operatorname{cotan}(t)\mathrm{d}t.$$
23. En déduire que :
$$S_p \geq \frac{1}{\pi}\left(\ln\left(\sin\left(\frac{(q+1)\pi}{p}\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)\right).$$
24. Déterminer la limite de S_p puis celle de $E(|Z_p|)$ lorsque p tend vers $+\infty$.
25. Donner un équivalent de $\ln\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{p}\right)\right)$ lorsque p tend vers $+\infty$.
26. Donner un équivalent de $E(|Z_p|)$ lorsque p tend vers $+\infty$.
    On pourra s'inspirer des questions précédentes pour encadrer $E(|Z_p|)$.

FIN DU SUJET