

Modélisation mathématique et Informatique

Durée : 3 heures 30 minutes

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve : en cas de doute, il alerte au plus tôt le surveillant qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve. Les candidats pourront admettre le résultat d'une question pour répondre à une question postérieure à condition de le mentionner explicitement.

Le sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7. Il se compose de 3 parties largement indépendantes et d'une annexe. La partie 2 est consacrée à l'informatique.

Un industriel cherche à optimiser son processus de cuisson des petits pois dans une cuve chauffée. Le cahier des charges demande à ce que les petits pois cuisent 10 minutes à une température comprise entre 90°C et 92°C. L'industriel utilise la puissance de chauffe pour commander les températures.

1 Modélisation et commande du processus

Dans cette partie, on suppose que la température des petits pois et la température de l'eau de la cuve sont uniformes et que la cuisson peut donc être modélisée par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} m_1 C_1 \frac{dT_1}{dt} = h_1 S_1 (T_2 - T_1) \\ m_2 C_2 \frac{dT_2}{dt} = h_1 S_1 (T_1 - T_2) + h_2 S_2 (T_\infty - T_2) + u \end{cases} \quad (\text{E})$$

où m_1 et m_2 sont les masses respectives des petits pois et de l'eau dans la cuve (en kg), C_1 et C_2 sont les capacités thermiques massiques respectives du petit pois et de l'eau (en $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$), h_1 et h_2 sont les coefficients de transfert thermique entre l'eau et les petits pois d'une part, et entre l'eau et l'extérieur d'autre part (en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$), S_1 et S_2 sont respectivement la surface totale des petits pois et la surface d'échange entre l'eau et l'extérieur (en m^2), T_1 , T_2 et T_∞ sont les températures respectives des petits pois, de l'eau et de l'extérieur (en K) et u est la puissance de la résistance chauffante utilisée pour chauffer la cuve (en W). Cette puissance de chauffe u constitue le moyen d'action de l'industriel sur les températures T_1 et T_2 et est donc appelée la **commande**.

On suppose que toutes ces quantités sont constantes au cours du temps, en dehors des températures T_1 et T_2 et de la commande u . En particulier, la température extérieure est constante et vaut $T_\infty = 20^\circ\text{C}$. Le temps t sera exprimé en **minutes**.

1.1 Commande en boucle ouverte (cas u constant)

1. On note $x_1 = T_1 - T_\infty$ et $x_2 = T_2 - T_\infty$. Établir les équations différentielles vérifiées par x_1 et x_2 . On les écrira sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, u) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, u) \end{cases} .$$

On admettra que l'on peut réécrire ces équations sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \quad (1)$$

avec $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}$, A une matrice de $M_{2,2}(\mathbb{R})$, b un vecteur de \mathbb{R}^2 et $u \in \mathbb{R}$ constant.

Dans la suite du problème, on prendra

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

2. On suppose qu'il existe $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dans \mathbb{R}^2 et u dans \mathbb{R} tels que $Ax + bu = 0$.
 - (a) Montrer qu'alors $x_1 = x_2$.
 - (b) Interpréter.
 - (c) Calculer la valeur de u si on considère que $x_1 = x_2 = 72$.
3.
 - (a) Calculer les valeurs propres de A .
 - (b) Montrer que A est diagonalisable.
 - (c) Donner une base de vecteurs propres de A . On choisira les premières coordonnées de ces vecteurs propres égales à 1.
 - (d) En déduire les matrices P et P^{-1} vérifiant $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$.

4. Soit x une solution de (1). On définit $z = P^{-1}x$, où $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que $\frac{dz}{dt} = P^{-1} \frac{dx}{dt}$.
- (b) En déduire que

$$\frac{dz}{dt} = Dz + \beta u, \quad (2)$$

où β est un vecteur à expliciter.

- (c) On suppose que $T_1(0) = 20^\circ\text{C}$ et $T_2(0) = 92^\circ\text{C}$. Calculer $z(0)$.
- (d) Résoudre l'équation différentielle vectorielle (2) en supposant que $u = 16$. On écrira séparément les équations différentielles vérifiées par z_1 et z_2 .
- (e) En utilisant la relation $x = Pz$, montrer que pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{cases} x_1(t) &= 72 - 40e^{-t} - 32e^{-10t} \\ x_2(t) &= 72 - 32e^{-t} + 32e^{-10t} \end{cases}.$$

5.
 - (a) Étudier sur \mathbb{R}_+ la fonction x_2 définie à la question 4.(e). Tracer sa courbe représentative. *On fera figurer sur le graphique tous les éléments importants.*
 - (b) Donner une interprétation du comportement de la fonction x_2 .
 - (c) On définit $t_R = \min\{t \geq 0 : \forall t' \geq t, T_2(t') \geq 90\}$. Que représente ce temps t_R ? Le placer sur la courbe représentative de x_2 . On rappelle que $x_2 = T_2 - T_\infty$.
 - (d) Montrer que $\ln(16)$ minutes est une bonne approximation de t_R . Comment chaque valeur propre de A influence-t-elle t_R ?

1.2 Commande en boucle fermée (cas u variable)

Pour améliorer les performances, on décide de faire varier la puissance de chauffe en fonction de la température de l'eau en considérant, pour tout $t \geq 0$: $u(t) = 16 + k(72 - x_2(t))$, où $k \geq 0$ est une constante de réglage appelée **gain**.

6. Expliquer ce choix de fonction pour la puissance de chauffage. Quel est l'intérêt ?
7. Que vaut t_R pour $k = 0$?
8. On définit $w(t) = x(t) - \begin{pmatrix} 72 \\ 72 \end{pmatrix}$. Montrer que $\frac{dw}{dt} = (A - kbc^\top)w$, où $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et c^\top désigne sa transposée.
9. On note $\lambda_1(k)$ et $\lambda_2(k)$ les valeurs propres de $A - kbc^\top$ telles que $\lambda_1(k) < \lambda_2(k)$.
 - (a) Donner l'expression de $\lambda_1(k)$ et $\lambda_2(k)$ en fonction de k .
 - (b) Montrer que λ_1 et λ_2 sont des fonctions décroissantes de k sur \mathbb{R}_+ .
10. Quel est l'effet du gain k sur t_R ? Quels inconvénients à augmenter k peut-on envisager ?

2 Étude informatique des commandes

Cette partie consiste à mettre en place des programmes informatiques en lien avec la partie 1.

Les programmes sont à rédiger en langage Python. L'annexe 1 page 7 comporte des rappels sur les commandes utiles. Avant chaque algorithme, on écrira brièvement le raisonnement suivi et la formule qu'il est censé calculer.

2.1 Recherche du minimum d'une fonction

Soit $f: t \mapsto 72 - 32e^{-t} + 32e^{-10t}$.

1. Écrire une fonction d'en-tête `f(t)` prenant en entrée t (un réel) et qui renvoie la valeur de $f(t)$.
2. On définit la fonction d'en-tête `minimum_f(N)` prenant en entrée N (un entier) par le code (incomplet) suivant :

```
1 def minimum_f(N):
2     Lt1 = np.linspace(0, 5, N)
3     Ly1 = []
4     for k in range(0, N):
5         Ly1.append(f(Lt1[k]))
6     ...
7     ...
8     return ...
```

Décrire en quelques mots ce que contiennent les variables `Lt1` et `Ly1` à l'issue des lignes 2 à 5.

3. Compléter sur la copie (avec autant de lignes que nécessaire) la fonction `minimum_f` pour qu'elle renvoie une liste composée des deux éléments suivants :

- une valeur approchée m du minimum de f sur $[0; 5]$;
- le temps t_m en lequel cette valeur approchée est atteinte (c'est-à-dire $m = f(t_m)$).

On veillera à n'écrire qu'une seule boucle après celle des lignes 4 et 5 et à ne pas utiliser la commande `min`.

4. On teste la fonction `minimum_f` sur différentes valeurs de N . Voici les résultats obtenus (tronqués à 4 chiffres après la virgule) :

- pour $N_1 = 20$, la fonction donne $m_1 = 49.7070$ et $t_{m_1} = 0.2631$;
- pour $N_2 = 20000$, la fonction donne $m_2 = 49.7012$ et $t_{m_2} = 0.2557$.

Il y a une différence entre t_{m_1} et t_{m_2} .

- (a) Cette différence était-elle prévisible et à quoi est-elle due ?
- (b) Est-ce t_{m_1} ou t_{m_2} qui devrait être le plus proche de la valeur exacte cherchée ?
5. On teste maintenant sur une troisième valeur située entre N_1 et N_2 : pour $N_3 = 50$, la fonction donne $m_3 = 49.9370$ et $t_{m_3} = 0.3061$. Commenter ce résultat.

2.2 Recherche du point d'annulation d'une fonction

Pour une fonction $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ donnée, avec I un intervalle de \mathbb{R} , on s'intéresse à la résolution approchée de l'équation $F(x) = 0$. On suppose que F s'annule en un point appelé $x^* \in I$ et que F est suffisamment régulière pour que les calculs suivants soient bien définis. L'objectif est d'obtenir une valeur approchée de x^* .

On utilise la méthode de Newton, qui consiste à définir la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \text{ à choisir,} \\ u_{n+1} = u_n - \frac{F(u_n)}{F'(u_n)} \text{ pour } n \geq 0. \end{cases}$$

On admet que, sous des hypothèses non précisées ici, cette suite converge vers x^* et que, s'il y a deux solutions à l'équation $F(x) = 0$, alors selon le choix de u_0 la suite va converger vers une solution ou vers l'autre.

6. Soit $e > 0$. À l'aide d'une boucle **while**, écrire une fonction d'en-tête **Newt(F,G,u0,e)** qui calcule les termes de la suite en s'arrêtant au premier terme u_{n_0} vérifiant $|F(u_{n_0})| < e$ (en supposant qu'un tel n_0 existe). Les arguments d'entrée sont : F une fonction, G une fonction qui correspond à F' , u_0 le premier terme de la suite et e . La fonction doit renvoyer u_{n_0} .
7. Par rapport à l'objectif de résoudre de façon approchée l'équation $F(x) = 0$, expliquer à quoi correspond la quantité e utilisée dans l'écriture de **Newt**. Parmi les choix suivants pour e , indiquer (avec justification succincte) celui qui semble le plus pertinent pour obtenir la meilleure précision sur la valeur approchée : $e_1 = 100$, $e_2 = 1$, $e_3 = 10^{-8}$.
8. Toujours par rapport à l'objectif de résoudre de façon approchée l'équation $F(x) = 0$, justifier s'il est pertinent ou pas d'effectuer la modification suivante sur la fonction **Newt** : renvoyer le premier terme u_n vérifiant $F(u_n) = 0$.
9. À la question 6., on a supposé l'existence d'un n_0 vérifiant $|F(u_{n_0})| < e$. Que se passe-t-il dans la fonction **Newt** si un tel n_0 n'existe pas ?
10. On souhaite modifier la fonction **Newt** de manière à fixer un nombre maximal d'itérations pour la boucle **while**. Écrire une nouvelle fonction d'en-tête **NewtS(F,G,u0,e,nder)**, basée sur la fonction **Newt**, telle que :
 - s'il existe un terme u_{n_0} tel que $|F(u_{n_0})| < e$ avec $n_0 \leq n_{\text{der}}$, la fonction renvoie u_{n_0} ;
 - si le nombre d'itérations dépasse (strictement) la valeur n_{der} , la boucle est stoppée et la fonction renvoie le booléen **False**.
11. Expliquer comment la méthode de Newton peut être utilisée pour trouver une valeur approchée du temps t_R défini à la question 5.(c) de la partie 1.
12. On définit les fonctions suivantes (où **f** a été définie à la partie 2.1) :

```
def F1(t):
    return f(t)-70
def G1(t):
    return 32*np.exp(-t)-320*np.exp(-10*t)
```

puis on exécute pour $e=10^{-14}$ et $nder=9$ les deux appels suivants :

- **NewtS(F1,G1,2,e,nder)** qui renvoie 2.7725887222252261 ;
- **NewtS(F1,G1,0.1,e,nder)** qui renvoie 0.0072246696343453579.

Interpréter ces résultats en lien avec la partie 1.1.

3 Filtre de Kalman

Cette partie est indépendante des parties 1 et 2.

Pour des raisons de qualité, le cahier des charges de l'industriel impose que la température des petits pois ne dépasse pas une certaine valeur seuil. Dans la mesure où la température des petits pois n'est pas mesurée et que la température de l'eau n'est mesurée que chaque seconde, on propose dans cette partie de concevoir un système, appelé **Filtre de Kalman**, capable de reconstituer dynamiquement la température des petits pois à l'aide des mesures de la température de l'eau.

Pour cela, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note $x_i \in \mathbb{R}^2$ l'état de la cuisson (non observé), $y_i \in \mathbb{R}$ la température de l'eau (mesurée) et $u_i \in \mathbb{R}$ la commande (connue), à l'instant i . On modélise l'évolution de la cuisson à l'aide d'un processus défini par, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{i+1} &= Fx_i + gu_i \\ y_i &= h^\top x_i + \varepsilon_i \end{cases}, \quad (3)$$

où les éléments $F \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, $g, h \in \mathbb{R}^2$ sont donnés (avec h^\top désignant la transposée de h) et les ε_i sont des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ représentant le bruit de mesure, avec $\sigma^2 > 0$.

L'objectif de cette partie est de construire une suite $(\hat{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'estimations des quantités $x_i \in \mathbb{R}^2$, à partir des mesures bruitées $y_j \in \mathbb{R}$, avec $j \leq i$.

3.1 Un cas simple

On suppose, dans cette partie uniquement, que $F = I_2$, $g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^2$ est l'état initial de la cuisson.

1. En notant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\bar{y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$, montrer que \bar{y}_n suit une loi $\mathcal{N}(h^\top x_0, \frac{\sigma^2}{n})$.
2. Montrer que, pour tout $\delta > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\bar{y}_n - h^\top x_0| > \delta) = 0$.

3.2 Vecteurs gaussiens

Soit x une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^2 . On dira que x est un **vecteur gaussien** de moyenne $\mu \in \mathbb{R}^2$ et de matrice de covariance $\Sigma \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ si

- Σ est symétrique et pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, on a $v^\top \Sigma v \geq 0$, et
- pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $v^\top x$ suit une loi $\mathcal{N}(v^\top \mu, v^\top \Sigma v)$.

Soit x un vecteur gaussien de moyenne μ et de matrice de covariance Σ .

3. Montrer que pour tout vecteur $w \in \mathbb{R}^2$, $x + w$ est un vecteur gaussien de moyenne $\mu + w$ et de matrice de covariance Σ .
4. Montrer que pour tout vecteur $w \in \mathbb{R}^2$, si z est une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, zw est un vecteur gaussien de moyenne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de matrice de covariance $\sigma^2 ww^\top$.
5. Montrer que pour toute matrice $M \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, Mx est un vecteur gaussien de moyenne $M\mu$ et de matrice de covariance $M\Sigma M^\top$.

3.3 Construction de l'estimation \hat{x}_i

On suppose que x_0 est un vecteur gaussien de moyenne μ_0 et de matrice de covariance Σ_0 , indépendant des bruits ε_i , pour $i \in \mathbb{N}$. On souhaite construire récursivement notre estimation sous la forme $\hat{x}_0 = \mu_0$ et

$$\hat{x}_{i+1} = p_{i+1} + (y_{i+1} - h^\top p_{i+1})k_{i+1},$$

où $p_{i+1} = F\hat{x}_i + gu_i$ et $k_{i+1} \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur, indépendant des mesures, que l'on souhaite déterminer.

6. Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, x_i est un vecteur gaussien de moyenne $\mu_i = F^i \mu_0 + \sum_{j=0}^{i-1} F^j g u_{i-1-j}$ et de matrice de covariance $\Sigma_i = F^i \Sigma_0 (F^\top)^i$.
7. Montrer que $x_0 - \hat{x}_0$ est un vecteur gaussien dont on donnera la moyenne et la matrice de covariance.
8. Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $x_{i+1} - \hat{x}_{i+1} = (I_2 - k_{i+1} h^\top) F (x_i - \hat{x}_i) - \varepsilon_{i+1} k_{i+1}$.

On admettra par la suite que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $x_i - \hat{x}_i$ est un vecteur gaussien de moyenne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de matrice de covariance Q_i vérifiant la relation de récurrence

$$Q_{i+1} = (I_2 - k_{i+1} h^\top) F Q_i F^\top (I_2 - k_{i+1} h^\top)^\top + \sigma^2 k_{i+1} k_{i+1}^\top.$$

9. Montrer que l'on peut écrire

$$Q_{i+1} = \alpha_i \left(k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^\top h \right) \left(k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^\top h \right)^\top + F Q_i F^\top - \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^\top h h^\top F Q_i F^\top,$$

où $\alpha_i \in \mathbb{R}$ est à expliciter.

10. Montrer que $\alpha_i > 0$.
11. Donner la valeur de k_{i+1} telle que, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $v^\top Q_{i+1} v$ est minimal.

3.4 Convergence du Filtre de Kalman

Le but de cette partie est de montrer que la suite d'estimations $(\hat{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge. On suppose que, dans le processus (3), la matrice F est inversible, diagonalisable dans \mathbb{C} et de valeurs propres complexes de module strictement plus petit que 1. De plus, on prend $k_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^\top h$, où α_i a été introduit à la question 9.

12. Montrer que F^\top est aussi inversible, diagonalisable dans \mathbb{C} et de valeurs propres complexes de module strictement plus petit que 1.
13. On définit, pour tout i dans \mathbb{N} , $R_i = F^{-i} Q_i (F^\top)^{-i}$, où $F^{-i} = (F^{-1})^i$. Montrer que pour tout i dans \mathbb{N}

$$R_{i+1} = R_i - \frac{F^{-i} Q_i F^\top h h^\top F Q_i (F^\top)^{-i}}{h^\top F Q_i F^\top h + \sigma^2}.$$

14. (a) Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, la suite $(v^\top R_i v)_{i \in \mathbb{N}}$ est bornée.
 (b) En déduire que, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$ et tout $w \in \mathbb{R}^2$, la suite $(v^\top R_i w)_{i \in \mathbb{N}}$ est bornée.
15. (a) Montrer que, si v_1 et v_2 sont des vecteurs propres de F^\top associés aux valeurs propres complexes λ_1 et λ_2 , alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $v_1^\top Q_i v_2 = (\lambda_1 \lambda_2)^i v_1^\top R_i v_2$.
 (b) Conclure que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $\lim_{i \rightarrow +\infty} v^\top Q_i v = 0$.
16. Que peut-on dire du comportement asymptotique de $x_i - \hat{x}_i$?

Annexe 1 : Rappels Python pour la partie 2

On considère que le module `numpy` est importé via `import numpy as np`. Dans le tableau, les variables `a` et `b` sont des réels et `N` est un entier.

Python	Interprétation
<code>np.exp(a)</code>	Renvoie $\exp(a)$.
<code>np.linspace(a, b, N)</code>	Renvoie un tableau à une dimension contenant N valeurs équiréparties dans $[a, b]$; ces valeurs sont les $t_k = a + \frac{b-a}{N-1}k$ pour $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$.

« FIN DU SUJET »
