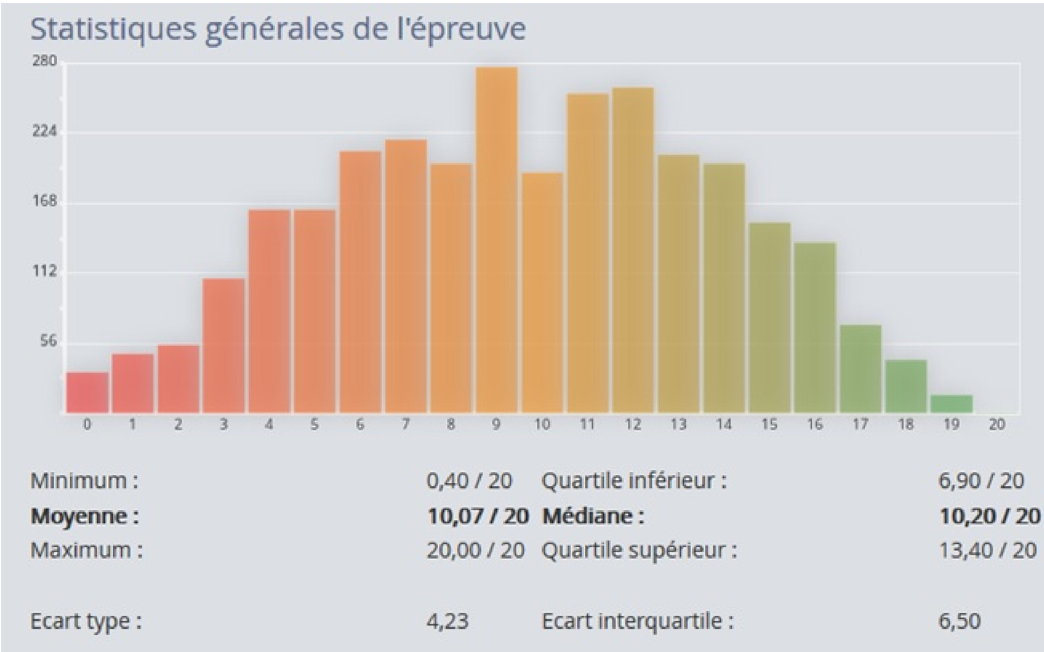
CONCOURS ABCPST - SESSION 2020

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT



L'objectif de ce rapport n'est pas d'accabler les candidats en énumérant les erreurs qu'ils ont pu commettre mais de pointer certaines lacunes récurrentes afin d'aider les futurs candidats dans leur préparation.
De façon générale, la présentation des copies est à améliorer. Mettre en valeur ses résultats et rendre une copie soignée sont des compétences grandement appréciées par les correcteurs et qu'il n'est pas difficile d'acquérir en s'entrainant.

I. Résultats préliminaires

1. (a) Question réussie par près de 90% des candidats.
   (b) La conjecture est quasiment toujours correcte mais la justification est souvent rapide et maladroite. Plutôt que de nommer une matrice D_p^{-1} et vérifier que $D_pD_p^{-1} = I_n$, il est préférable de lui donner un autre nom.
   Signalons qu'il est ennuyeux de voir des raisonnements par récurrence qui n'utilisent pas l'hypothèse de récurrence dans la preuve de l'hérédité. Un raisonnement par récurrence est dans ce cas non justifié et il est alors judicieux de le remarquer.

2. (a) La définition de la linéarité est connue mais certains candidats prennent leur scalaire dans $\mathbb{R}$ pour conclure que f est $\mathbb{C}$-linéaire.

   (b) L'injectivité est une notion acquise dans presque 90% des cas. Elle est essentiellement prouvée à l'aide de contre-exemples. Ceux-ci ont été acceptés même lorsqu'ils étaient donnés pour une valeur particulière de p.

   (c) La définition de la surjectivité est globalement connue mais sa démonstration est souvent une paraphrase : "il est évident que tout complexe peut s'écrire comme la somme de p complexes". Un exemple d'antécédent était attendu. Le taux de réussite chute à 57%.

   (d) Le théorème du rang est souvent cité mais pas toujours bien énoncé. Le fait que le corps de base soit celui des complexes et non celui des réels a posé problème. Rappelons que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

   Certains obtiennent la dimension du noyau de f en en exhibant une base, ce qui est également pertinent.

3. La plupart des candidats reconnaissent la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique mais oublient de justifier que la raison est différente de 1. Lorsque les étudiants y pensent, on constate que les nombres complexes ne sont pas maîtrisés.

   Le complexe $e^{2i\pi}$ n'est pas toujours identifié comme égal à 1 et certaines copies doivent revenir à la définition pour obtenir $1 - e^{2i\pi} = 0$.

   On voit aussi des erreurs graves sur les puissances comme $z^{pq} = z^p z^q$.

   L'interprétation géométrique à l'aide d'un barycentre à été rarement donnée. Il n'était pas nécessaire de parler d'isobarycentre : les points ont également été donnés à ceux qui ont interprété le résultat comme une affixe moyenne.

4. Ceux qui ont séparé les deux implications ont au moins eu les points correspondants à l'implication "simple". La manipulation des équivalences est souvent approximative.

   Attention, lorsque z est un nombre complexe, les notions de $\ln(z)$ et $z^{1/p}$ n'ont pas de sens.

II. Étude d'un modèle de diffusion sur le cercle

5. Il s'agit d'une question très classique. Il fallait utiliser la formule des probabilités totales en prenant soin de préciser le système complet d'évènements utilisé. La rédaction nécessitait de traiter les bords à part.

   La question 7 permettant de trouver la matrice M_p, les candidats étaient surtout attendus sur sa justification.

   En moyenne, les candidats ont obtenu la moitié des points à cette question.

6. L'énoncé précisait "sans justifications", les candidats ayant fait une récurrence pour obtenir le résultat attendu ont donc perdu inutilement du temps. Rappelons que l'ordre compte dans un produit matriciel. Le taux de réussite est de 52% ce qui est assez faible.

7. Question bien traitée par les trois quart des copies.

8. (a) Cette question classique de réduction a souvent été traitée. Quelques erreurs :

      — Il faut préciser que la matrice est symétrique et **réelle** pour en déduire qu'elle est diagonalisable. Une justifications du caractère diagonalisable après calculs par des arguments de dimension a bien entendu été acceptée.

      • Certaines opérations ne sont pas "élémentaires". Par exemple, l'opération $L_1 \leftarrow \lambda L_1 + L_2$ peut changer le rang de la matrice si λ est nul.

- $M_3 - \lambda I_3$ est souvent transformée en $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$, ce qui fausse le calcul des valeurs propres mais pas celui des espaces propres.
- Des erreurs de calculs pour trouver les espaces propres.
- Ne pas réagir lorsque l'on trouve un espace propre réduit au vecteur nul alors qu'il est associé à une valeur propre.

Néanmoins

- Le critère de diagonalisation est connu est bien appliqué.
- La relation de changement de base est connue.

Seul 26% des candidats obtiennent la totalité des points.

(b) Question souvent bien traitée. Une vérification rapide au brouillon permettrait d'éviter les erreurs de calculs. Il n'est pas nécessaire de faire apparaître les calculs sur la copie : la notation de cette question est binaire.

Certains candidats ayant utilisé le théorème spectral, affirme que la matrice P est orthogonale et ainsi que son inverse est sa transposée. Insistons sur le fait que ce théorème assure l'existence d'une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale mais n'assure pas (car c'est faux) que toute matrice P inversible vérifiant $P^{-1}MP$ diagonale, est orthogonale.

Bien entendu, l'évaluation de cette question était faite en fonction de la matrice (même fausse) obtenue par le candidat à la question précédente.

(c) Comme cela a déjà été précisé, le résultat $M_p^n = PD^nP^{-1}$ a besoin d'être prouvé soit par récurrence soit en utilisant la formule de changement de bases. Les passages à la limite dans les matrices sont hors programme donc ne peuvent pas être utilisés.

La somme des probabilités obtenues devait faire 1, il est bon de faire une remarque lorsque ce n'est pas le cas.

9. Question très peu traitée. Le spectre est souvent pressenti surtout qu'il apparaît dans la question suivante. Un petit nombre de candidats l'obtienne par opérations élémentaires successives. La recherche des espaces propres n'a été réussie que dans quelques bonnes copies.

10. Il fallait bien justifier que D_p avait p valeurs propres **distinctes** et était d'ordre ou de taille p (et non de rang p). Les sous-espaces propres n'étant que très rarement trouvés, leur appartenance au noyau n'a pu être démontrée.

11. Cette question a été source de nombreuses erreurs ou imprécisions.

    Certaines copies affirment que, comme D_p est inversible, son inverse l'est aussi. Ce résultat est juste mais nécessite d'être justifié. En revanche, il est faux d'en déduire que M_p est diagonalisable comme somme de deux matrices diagonalisables. Lorsque le caractère diagonalisable de D_p^{-1} est justifié, la question est souvent bien traitée.

    Il était aussi possible d'utiliser le théorème spectral et, en précisant que M_p était symétrique réelle, en déduire qu'elle était diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et donc dans $\mathbb{C}$.

12. Les candidats pensent à utiliser le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ou la somme des colonnes. D'ailleurs, plutôt que d'écrire "La somme de toutes les colonnes vaut 1, donc 1 est valeur propre", on préférera "$M_p \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc 1 est valeur propre."

    Attention, cela ne prouve pas que G_0 est de dimension un.

13. Question peu traitée.
14. (a) Question peu traitée.
    (b) Question peu traitée.
15. (a) Il fallait utiliser et justifier les inégalités strictes : $-1 < \cos(2k\pi/p) < 1$.
    Certains étudiants n'ayant pas suivi le fil du sujet ont pensé pouvoir traiter cette question mais n'ont pas réussi car ils ont compris qu'il fallait trouver la limite de $\cos\left((2k\pi/p)^n\right)$ et non de $(\cos(2k\pi/p))^n$.
    (b) Question peu traitée.
    (c) Question peu traitée.

III. Étude d'une variable aléatoire

16. (a) Les étudiants ont pour plus de 60% compris que la fonction cotan était correctement définis aux point x tel que $\sin x \neq 0$ mais seul un tiers a été capable d'écrire cet ensemble correctement. Il y a eu beaucoup de confusions entre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ et même $\mathbb{R}$ et d'énormes difficultés à écrire un ensemble correctement.
    Parmi les réponses attendues $\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ ou $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi, (k+1)\pi[$.
    (b) L'indication donnée dans la question n'avait pas besoin d'être prouvée mais devait aider les candidats pour leur tracé. Seules 25% des copies ont réussi à tracer le graphe de cotan alors que seule l'allure de la courbe était attendue.
17. Cette question étant géométrique, un schéma était une aide précieuse et a été valorisé. Trouver une équation de droite puis utiliser les formules de trigonométrie a été ravageur. Moins de 10% des candidats ont obtenus une partie des points.
18. La linéarité de l'espérance est citée, mais on ne peut pas en déduire, pour une fonction f quelconque que $E(f(X)) = f(E(X))$.
    Le théorème de transfert n'est pas toujours maîtrisé et cité. Il fallait connaître les valeurs particulières de sin et cos pour conclure.
19. Question peu traitée.
20. Question peu traitée.
21. La question n'a pas été comprise par les étudiants. Les copies l'ayant abordée ce sont contentées d'utiliser la continuité de cotan sur $]0, \pi/2]$ pour en déduire son intégrabilité.
    Il s'agissait d'une intégrale impropre en 0 et il fallait une étude locale pour conclure.
22. Il s'agissait d'une comparaison série-intégrale qui a été globalement bien faite lorsqu'elle a été traitée. Néanmoins certains arrivent à l'inégalité souhaitée en partant de la croissance de cotan sur $]0, \pi/2]$...
23. Question globalement bien faite lorsqu'elle a été traitée.
24. À ce stade du sujet, les étudiants ne se souvenaient plus du lien entre p et q donc les limites obtenues sont rarement justes.
25. L'équivalent $\sin x \underset{0}{\sim} x$ est souvent connu. Par contre ce n'est pas parce que deux suites u et v sont équivalentes que l'on peut en déduire que $\ln u \sim \ln v$.
26. Question non traitée.