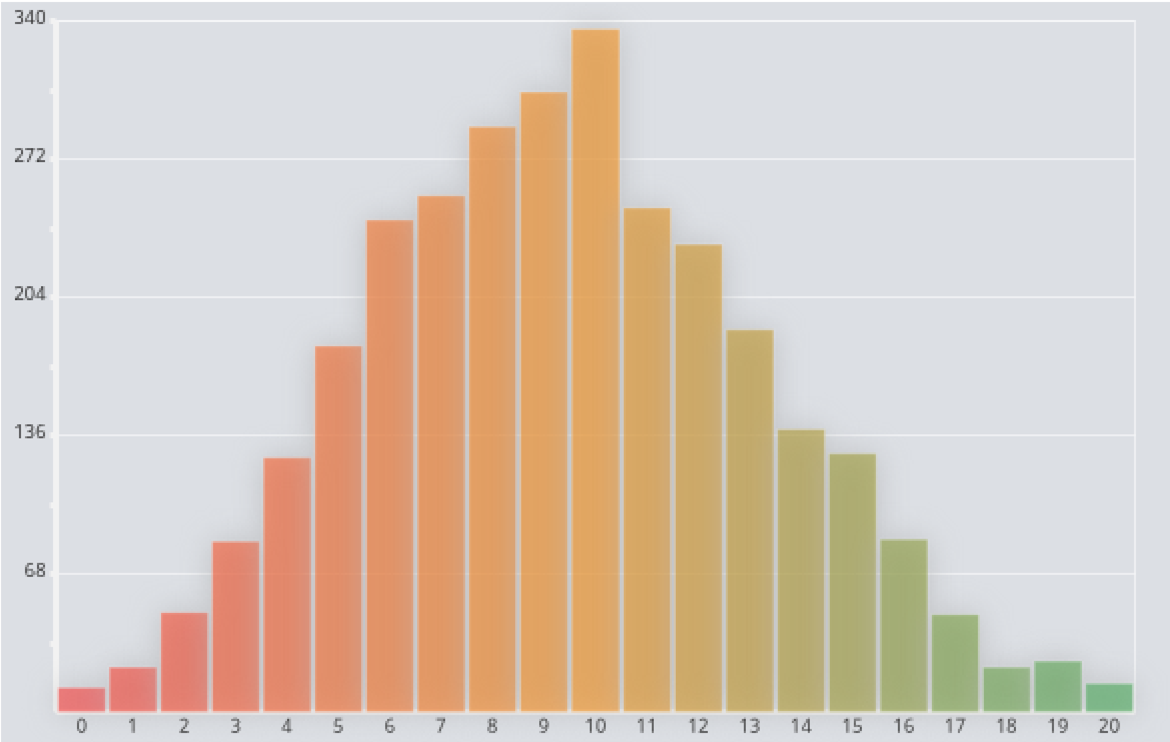
Statistiques générales de l'épreuve



Minimum :	0,00 / 20	Quartile inférieur :	7,20 / 20
Moyenne :	**9,85 / 20**	**Médiane :**	**9,70 / 20**
Maximum :	20,00 / 20	Quartile supérieur :	12,30 / 20
Ecart type :	3,82	Ecart interquartile :	5,10

Introduction

Le sujet traitait de la modélisation mathématique et informatique ainsi que de la commande d'un problème de thermique.

La partie 1 concernait la résolution d'un système de deux équations différentielles linéaires couplées dans deux situations (commande constante, ou commande par retour d'état).

La partie 2 s'intéressait à la recherche du minimum et d'un point d'annulation d'une fonction à l'aide d'outils numériques.

La partie 3 développait une méthode statistique d'estimation de l'état du système considéré : le filtre de Kalman.

1 Remarques générales sur l'épreuve

Le sujet abordait de nombreux aspects du programme : équations différentielles, probabilités et statistiques, algèbre et informatique. Dans l'ensemble, les résultats ont été satisfaisants. Les parties 1 et 2 ont été globalement bien réussies. La partie 3, plus technique, n'a été que peu abordée.

Le sujet a été relativement bien compris par une grande majorité des candidats, avec de nombreuses remarques pertinentes et une quasi absence de copies vides, les candidats ont tous fait des choses. Le décalage du concours et la préparation des candidats impactés par la situation sanitaire ne semblent pas avoir eu d'incidence sur le niveau.

Le jury note un réel effort des candidats concernant la rédaction (clarté, propreté). On pourra cependant noter que certains problèmes pourraient être résolus avec plus de concision (notamment la résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants ne devrait pas s'étaler sur deux pages).

De manière générale, peu de candidats se basent sur l'intuition physique découlant du contexte pour répondre aux questions, notamment les questions d'interprétation. Ainsi, des erreurs pourraient être évitées comme quand des candidats trouvent des puissances de chauffage négatives ou des températures constantes alors qu'on se trouve clairement dans une situation où la température change.

2 Difficultés mathématiques notables

1. Le symbole $\Leftrightarrow$ est souvent mal utilisé et de nombreux étudiants confondent une équivalence et une implication, voire intervertissent le sens d'une implication.
2. On trouve beaucoup d'opérations illicites sur les vecteurs et les matrices. De plus, de nombreux candidats ont des difficultés à voir que si on prend deux vecteurs $x = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix}$, le produit xy^T est bien défini et vaut $xy^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 \\ x_2y_1 & x_2y_2 \end{pmatrix}$. Enfin, on voit souvent des raisonnements de la forme $\frac{dx}{dt} = Mx$ donc $\frac{dx_1}{dt} = Mx_1$; il est pourtant aisé de constater que cette seconde égalité n'a aucun sens en regardant les objets en jeu.
3. Le jury constate à nouveau de très nombreuses difficultés sur la diagonalisation. La justification de la diagonalisabilité est souvent mal comprise et beaucoup de candidats confondent les notions et utilisent le rang de M, la « dimension de M », la dimension de $M_2(\mathbb{R})$ voire l'inversibilité de M pour justifier la diagonalisabilité. De plus, le calcul des vecteurs propres est souvent problématique, on constate des erreurs dans la construction de la matrice de passage (inversion des colonnes) et des difficultés pour calculer son inverse.
4. Le jury est stupéfait du nombre d'erreurs intervenant dans l'étude d'une fonction simple (question 5a) : erreurs sur les variations (notamment résoudre dérivée $= 0$ au lieu de dérivée > 0), erreurs manifestes sur la représentation graphique (allure aberrante, courbe avec un pic, valeur incorrecte pour $t = 0$ ou pour $t \to +\infty$, tangente horizontale à $t = 0$...), pas d'indication de l'asymptote ou de la tangente horizontales... Il est assez préoccupant de constater que de nombreux étudiants ne sont pas capables de réaliser cette question parfaitement, alors qu'elle ne dépasse pas le niveau de Terminale Scientifique et qu'un usage raisonné de la calculatrice permet d'éviter de nombreuses erreurs.
5. La somme de deux variables aléatoires gaussiennes **indépendantes** est gaussienne. Trop de candidats oublient de le mentionner.
6. De multiples candidats utilisent la loi faibles des grands nombres ou l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev sans mentionner le fait que la variable aléatoire en jeu admet une variance. On constate aussi une confusion avec le théorème central limite.

3 Difficultés informatiques notables

Le jury constate que la partie informatique a été globalement bien réussie cette année et que seuls quelques rares candidats ont choisi de ne pas l'aborder.

1. Comme tous les ans, une phrase d'explication était demandée avant les codes, mais de trop nombreux étudiants l'ont omis.
2. On constate une confusion entre l'indice d'un élément dans une liste et cet élément.
3. Un bon nombre de candidats bute sur la recherche du minimum d'une liste. L'erreur la plus fréquente est la confusion avec le tri d'une liste, qui amène à comparer les éléments successifs et non pas chaque élément avec le minimum.
4. Les problèmes relatifs au calcul avec des nombres flottants et en particulier les tests d'égalité à zéro ne sont pas maîtrisés.
5. Un certain nombre de candidats mentionnent des notions statistiques pour justifier les différences obtenues dans le calcul approché du minimum avec différents échantillonnages d'un intervalle, alors que rien d'aléatoire n'intervient ici.

4 Eléments de correction

Le jury propose dans cette partie des éléments de réponse à des questions choisies ayant posé des problèmes spécifiques aux candidats.

- **Partie 1, question 2.a**
  On a dans la question précédente montré une implication : s'il existe x et u tels que $Ax + bu = 0$ alors $x_1 = x_2$. $Ax + bu = 0$ se traduit par $\frac{dx}{dt} = 0$ ou encore $\frac{dT_1}{dt} = \frac{dT_2}{dt} = 0$ tandis que $x_1 = x_2$ équivaut à $T_1 = T_2$. Ainsi, on a démontré que s'il existe une puissance de chauffe u et un couple de températures pour les petits pois et pour l'eau tels que ces températures n'évoluent pas, alors les petits pois et l'eau sont à la même température. On peut résumer tout ceci sous la forme : en régime permanent, l'eau et les petits pois ont la même température (ce qui colle bien sûr avec l'intuition physique).
- **Partie 1, question 5.b**
  La quantité x_2 représente l'écart de température entre l'eau et l'extérieur (20 degrés). Ainsi on constate que la température de l'eau, initialement à 92 degrés, diminue brutalement lorsque l'on plonge les petits pois dans la cuve. Cela est dû à la différence de température : les petits pois étant plus froids, un transfert thermique se met en place et la température de l'eau baisse tandis que celle des petits pois augmente. Lorsque l'écart de température entre les petits pois et l'eau devient faible, le flux de chaleur (qui est proportionnel à l'écart de température) diminue jusqu'à égaler la valeur du flux de chaleur fourni à l'eau par le chauffage. A cet instant, la température de l'eau atteint son minimum. Au delà de cet instant, la température de l'eau remonte pour finalement tendre vers une valeur limite de 92 degrés, correspondant à la valeur choisie initialement.
- **Partie 1, question 5.c**
  t_R représente le temps à partir duquel la température de l'eau **reste définitivement** supérieure ou égale à 90 degrés. Attention, t_R n'est pas le premier temps pour lequel la température vaut (ou est supérieure à) 90 degrés, puisque l'eau commence l'expérience à 92 degrés.
- **Partie 1, question 6**
  Cette puissance est choisie de manière à adapter la puissance de chauffe à la température de l'eau. Ainsi, si l'eau est à la température souhaitée (92 degrés), la puissance vaut 16 W, soit juste la puissance nécessaire pour maintenir la température constante ; si l'eau est sous la température souhaitée, on augmente la puissance proportionnellement à l'écart mesuré : on chauffe plus fort pour accélérer le chauffage ; enfin, si l'eau venait à dépasser les 92 degrés, on chauffe moins pour là aussi accélérer la baisse de température. Dans tous les cas, on s'attend à ce que la convergence vers la température cible soit plus rapide.
- **Partie 1, question 10**
  Seule la valeur propre la plus grande a un impact notable sur t_R (c'est l'idée sous-jacente à l'approximation $t_R \approx \ln(16)$ de la question 5.d) ; de plus, diminuer cette valeur propre diminue t_R. Puisque les valeurs propres de $A - kbc^T$ sont des fonctions décroissantes de k, on en déduit que quand le gain k augmente, t_R diminue.
  Concernant les inconvénients potentiels, on peut citer une potentielle surchauffe inutile (avec possible dépassement de la consigne), une utilisation plus importante d'énergie ou encore une plus grande sensibilité aux perturbations.
- **Partie 2, question 8**
  Il n'est pas pertinent de tester l'égalité à zéro lorsque l'on travaille avec des nombres flottants, à cause des erreurs machines. Il vaut mieux tester si le nombre est « très petit ».
- **Partie 3, question 8**
  Soit $i \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
x_{i+1} - \hat{x}_{i+1} &= Fx_i + gu_i - (F\hat{x}_i + gu_i) - (h^\top x_{i+1} + \varepsilon_{i+1} - h^\top(F\hat{x}_i + gu_i))k_{i+1} \\
&= F(x_i - \hat{x}_i) - h^\top(Fx_i + gu_i)k_{i+1} + h^\top(F\hat{x}_i + gu_i)k_{i+1} - \varepsilon_{i+1}k_{i+1} \\
&= F(x_i - \hat{x}_i) - h^\top F(x_i - \hat{x}_i)k_{i+1} - \varepsilon_{i+1}k_{i+1}
\end{aligned}$$

Or si x, y et z sont trois vecteurs colonnes de même taille, un calcul direct montre que $x^T yz = zx^T y$. On en déduit que

$$x_{i+1} - \hat{x}_{i+1} = F(x_i - \hat{x}_i) - k_{i+1}h^\top F(x_i - \hat{x}_i) - \varepsilon_{i+1}k_{i+1},$$

d'où le résultat. On notera ici que c'est la commutation licite de certains termes dans un produit matriciel qui permet de justifier le résultat.