Exemple 1

1. Question de cours.

Espérance et variance d'une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre 1/3.

---

2. Exercice.

Pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, on note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.
Pour tout vecteur a de $\mathbb{R}^n$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f_a(x) = \langle x, a\rangle.$$

1. Soit a un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f_a est une application linéaire.
2. Étude d'un exemple.
   On pose dans cette question (uniquement) : $a = (1, 2, \ldots, n)$.
   Expliciter f_a et donner une base de son noyau.
   Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(f_a)$?
3. Pour a et b dans $\mathbb{R}^n$, montrer que : $f_a = f_b \Longleftrightarrow a = b$.
4. Lorsque $a \neq 0$, quel est le rang de f_a ? En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f_a)$ lorsque $a \neq 0$.
5. On note $a = (a_1, \ldots, a_n)$.
   Écrire la matrice de f_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et retrouver les résultats des questions 3 et 4.
6. Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
   Montrer : $x = y \Longleftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}^n, f_a(x) = f_a(y)$.
7. Soient a et x deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
   Écrire un programme Python qui calcule $f_a(x)$ et qui teste si un vecteur x est dans le noyau de f_a.
8. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
   Soit g une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
   Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = f_a$ et que ce a est donné par $a = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} g(e_k)e_k$.
9. On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On admet que cet ensemble, muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication par un réel, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (a) Montrer que $\phi : a \mapsto f_a$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
   (b) En déduire que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est de dimension finie, préciser sa dimension et donner une base.

Exemple 2

1. Question de cours.

Énoncer le théorème central limite.

---

2. Exercice.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z).$$

On considère aussi l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$ et $v = g(e_1) + e_1$.

1. (a) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

   (b) À l'aide de Python, déterminer les valeurs propres de g et conjecturer la dimension de chaque sous-espace propre de f. L'endomorphisme f semble-t-il diagonalisable ?

   On rappelle que, dans la bibliothèque Python `numpy`*, la fonction* `linalg.eig(A)` *renvoie les valeurs propres (réelles et complexes) de* `A` *et la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres (dans le même ordre).*

2. (a) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Déterminer la matrice T de g dans la base $\mathcal{C}$.

   (c) En déduire les valeurs propres de g. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

3. On note $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MB\}$.

   (a) Écrire une fonction Python `E(M)` qui prend en argument une matrice `M` de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui renvoie `True` si $M \in E$ et `False` sinon.

   On rappelle que, si N est une matrice contenant des booléens, l'instruction `N.all()` *renvoie* `True` *si* `N` *ne contient que des* `True` *et renvoie* `False` *sinon.*

   On rappelle aussi que, dans la bibliothèque Python `numpy`*, la fonction* `dot(N,P)` *renvoie le produit matriciel NP.*

   (b) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (c) Montrer, par l'absurde, que si $M \in E$, alors M n'est pas inversible.

   (d) Montrer que $Sp(B) = Sp({}^tB)$ (où $Sp(B)$ est l'ensemble des valeurs propres de B)

   (e) Montrer que, si $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 et si $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de ${}^tB$ associé à la valeur propre 2, alors $X{}^tY \in E$.

   (f) En déduire que $\dim(E) \geqslant 2$.

Exemple 3

1. Question de cours.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-\pi;\pi]$.

---

2. Exercice.

On note $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme associée $|| \cdot ||$.
Soient u et v deux vecteurs **de norme 1**. On définit f l'endomorphisme de E par

$$f(w) = \langle w, u \rangle\, v + \langle w, v \rangle\, u.$$

1. (a) Écrire une fonction Python `ps(u,v)` qui prend en argument deux vecteurs `u` et `v` sous forme de listes et renvoie la valeur du produit scalaire $\langle u, v \rangle$.
   (b) Écrire une fonction Python `f(u,v,w)` qui prend en argument trois vecteurs sous forme de liste et renvoie le vecteur $f(w)$ sous forme de liste aussi.
2. On suppose **uniquement dans cette question** que u et v sont colinéaires.
   (a) Montrer que, pour tout $w \in E$, on a $f(w) = \pm 2 \langle w, u \rangle\, u$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.
   (c) Montrer que u est un vecteur propre de f et déterminer sa valeur propre associée.
   (d) En déduire que f est diagonalisable.
3. À partir de maintenant, les vecteurs u et v seront non colinéaires.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u, v)$.
   (b) En déduire la dimension de $\ker(f)$.
4. On suppose **uniquement dans cette question** que u et v sont orthogonaux.
   (a) Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2})$ une base orthonormée de $\ker(f)$.
   Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2})$ est une base orthonormée de E.
   (b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.
   (c) En déduire que f est diagonalisable.
5. On revient au cas général (u et v sont non colinéaires mais pas nécessairement orthogonaux).
   (a) Soit $(w_1, \ldots, w_{n-2})$ une base de $\ker(f)$.
   Montrer que $\mathcal{D} = (u, v, w_1, \ldots, w_{n-2})$ est une base de E.
   (b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{D}$.
   (c) En déduire que f est diagonalisable.

1. Question de cours.

Rappeler les deux expressions de la dérivée de la fonction tan.

---

2. Exercice.

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.
On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois la succession des résultats « Pile,Pile,Face », dans cet ordre. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient cette configuration. Si celle-ci n'est jamais obtenue, on conviendra que X vaut -1.
Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face, alors X prend la valeur 7.
Pour tout entier naturel n non nul, on pose F_n : « Obtenir Face au n-ème lancer », et P_n : « Obtenir Pile au n-ème lancer ».
Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, on pose :

- B_n l'événement défini par : $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$.
- U_n l'événement défini par : $U_n = \displaystyle\bigcup_{k=3}^{n} B_k$.
- $u_n = P(U_n)$.

1. (a) Écrire une fonction Python sans argument qui simule les lancers de dés jusqu'à l'apparition de la séquence « Pile, Pile, Face »et qui renvoie sous forme de liste les résultats de tous les lancers réalisés.

   (b) Utiliser la fonction précédente pour émettre une conjecture quant à l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de X.

2. (a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, calculer $P(B_n)$ et justifier que les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

   (b) Calculer u_3, u_4 et u_5 et démontrer que : $\forall n \geqslant 3, \quad u_{n+3} = u_{n+2} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{8}u_n$.

   (c) Démontrer que la suite (u_n) converge, et calculer sa limite. En déduire la valeur de $P(X = -1)$.

3. On admettra dans cette question le résultat suivant :
   Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, si la série de terme général $P(Y > n)$ converge, alors Y admet une espérance, et

   $$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y > n).$$

   Pour tout entier naturel n, on note $v_n = P(X > n)$.

   (a) Donner la valeur de v_0, v_1, v_2 et v_3.

   (b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} - v_{n+3} = \dfrac{1}{8}v_n$.

   (c) Montrer que X admet une espérance, et déterminer cette espérance.

1. Question de cours.

Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel.

---

2. Exercice.

On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités f et g, alors $X+Y$ est une variable aléatoire à densité dont une densité h est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$$

On s'intéresse à une modélisation du temps de présence de nouvelles espèces qui apparaissent entre les instants 0 et $\theta > 0$ dans un milieu donné.

À chaque nouvelle espèce (e), on associe deux variables aléatoires :

- X_e l'instant d'apparition qui est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, \theta]$.
- Y_e sa durée de vie dans le milieu qui est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1 et indépendante de la précédente.

1. On s'intéresse à une espèce (e).
   (a) Que représente $X_e + Y_e$?
   (b) Déterminer une densité de $X_e + Y_e$.
   (c) Pour tout $t > 0$, on pose $p = P([X_e + Y_e > \theta + t])$. Montrer que $p = \dfrac{1-e^{-\theta}}{\theta} e^{-t}$.

On suppose que les variables aléatoires associées aux différentes espèces sont mutuellement indépendantes et on note N le nombre aléatoire d'espèces qui apparaissent. On suppose que N est indépendante des variables aléatoires associées aux espèces et que N suit la loi de Poisson de paramètre μ.
Pour tout $t > 0$, on note Z_t le nombre d'espèces, parmi celles qui sont apparues, qui sont encore présentes dans le milieu à l'instant $\theta + t$.

2. (a) Écrire un programme Python `Esp2Zt(theta,mu,t)` qui calcule et renvoie une valeur approchée de $E(Z_t)$. On rappelle qu'après avoir importé le module `numpy.random`, l'instruction `rand()` (respectivement `poisson(a)` et `exponential(b)`) renvoit une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ (respectivement, de loi de Poisson de paramètre a, et de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\mathtt{b}}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle Z_t sachant $[N = n]$.
   (c) En déduire que Z_t suit la loi de Poisson de paramètre μp.
   Vérifier la cohérence de ce résultat avec les valeurs obtenues avec le programme de la question 2.a) pour $\theta = 6$, $\mu = 16$, $t = 4$ et $\theta = 6$, $\mu = 30$, $t = 7$.

On **admet** dans la suite que $W_t = N - Z_t$ suit la loi de Poisson de paramètre $\mu(1-p)$ puis que Z_t et W_t sont indépendantes.

3. (a) Montrer que $E\left(\dfrac{1}{W_t+1}\right) = \dfrac{1-e^{-\mu(1-p)}}{\mu(1-p)}$ puis calculer $E\left(\dfrac{Z_t}{W_t+1}\right)$ en fonction de μ et de p.
   (b) Montrer que pour tout $a \in]0, 1[$:

$$\mathbb{P}([Z_t \geqslant aN]) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{(1-a)Z_t + a}{W_t + 1} \geqslant a\right]\right)$$

   puis en déduire que :

$$P([Z_t \geqslant aN]) \leqslant \frac{(1-a)\mu p + a}{a\mu(1-p)}.$$

   (c) On suppose que $\mu = \theta^2$. Montrer que, pour tout $\alpha \in]0, 2[$, $\displaystyle\lim_{\theta \to +\infty} P\left(\left[Z_{\ln(\theta)} \geqslant \frac{N}{\theta^\alpha}\right]\right) = 0$.

Exemple 6

1. Question de cours.

Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

---

2. Exercice.

Deux amis Anna et Benoît jouent au jeu suivant : ils possèdent une machine qui, à chaque sollicitation, leur donne aléatoirement un entier naturel X.
Si cet entier X est impair, Anna donne X euros à Benoît, on considère que Benoît a gagné.
Si X est nul, on considère que la manche est nulle.
Si X est pair non nul, Benoît donne X euros à Anna, on considère que Anna a gagné.
On pose G le gain algébrique de Anna.
On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre a ($a > 0$).
On note enfin :
A : « Anna gagne », $p = P(A)$
B : « Benoît gagne », $q = P(B)$
et C : « la manche est nulle », $r = P(C)$.

1. Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire G.
   On rappelle que `np.random.poisson(a)` *permet de simuler une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre a.*
2. (a) Déterminer r et exprimer p et q sous forme d'une somme.
   (b) Exprimer $p + q$ et $p - q$ en fonction de a.
   (c) En déduire les valeurs de r, p, q en fonction de a.
3. Compléter le programme de la question 1, pour qu'il permette de donner une estimation de la valeur de l'espérance du gain de Anna d'une part, et de la probabilité pour Anna de gagner, d'autre part.
4. D'après les simulations effectuées, d'après vous, à qui le jeu donne-t-il l'avantage ? *On pourra tester les valeurs du gain et de la probabilité qu'Anna gagne pour $a = 2$.*
5. (a) Exprimer G en fonction de X
   (b) Calculer l'espérance du gain G de Anna.
6. On suppose désormais que X suit une loi géométrique de paramètre α. On garde les mêmes notations que précédemment.
   (a) Déterminer p, q, r.
   (b) Calculer l'espérance $E(G)$ de G après avoir justifié son existence.
   (c) Comment interpréter le signe de $E(G)$?

1. Question de cours.

Donner deux conditions suffisantes et non nécéssaires de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.

---

2. Exercice.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

   (a) Montrer que la variable aléatoire $Y = X+1$ suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

   (b) En déduire que X admet une espérance et une variance, et préciser leur valeur.

   (c) Écrire un programme en Python renvoyant une simulation de la variable aléatoire X.

   (d) Montrer que pour tout réel s de $[0,1]$, la variable aléatoire s^X admet une espérance, et montrer que :

$$E(s^X) = \frac{1}{2-s}$$

   On notera dans la suite f la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall s \in [0,1],\ f(s) = \frac{1}{2-s}$$

2. On considère une population qui évolue de génération en génération.
   On part de $Z_0 = 1$ individu, et on note pour tout $n \geqslant 1$, Z_n le nombre d'individus à la $n^{\text{ième}}$ génération, en supposant que, après avoir donné naissance, les individus de la $(n-1)^{\text{ième}}$ génération meurent.
   À chaque génération $n \in \mathbb{N}$, on suppose que chaque individu i engendre une portée d'individus de la génération suivante, de taille $X_{n+1,i}$, suivant la même loi que X, et indépendamment du nombre de descendants des autres individus existants ou ayant existé auparavant.

   (a) Écrire une fonction en Python qui, prenant un entier n en entrée, simule l'expérience, et renvoie la liste $[Z_0, Z_1, \ldots, Z_n]$ des nombres de descendants de la population jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ génération.
   Conjecturer le comportement de la population au cours d'un grand nombre de générations.

   (b) On note pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = P(Z_n = 0)$ la probabilité que la population soit éteinte à la génération n.
   Justifier que la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ.

   (c) Préciser la valeur de u_1 et vérifier que $u_1 = f(u_0)$.

   (d) Calculer pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la probabilité conditionnelle $P_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0)$.
   En déduire que $u_2 = f(u_1)$.

   (e) Démontrer plus généralement que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

   (f) En déduire la valeur de ℓ.

Exemple 8

1. Question de cours.

Allure de la représentation graphique d'une densité de la loi exponentielle de paramètre 1.

---

2. Exercice.

Rappel : *la méthode d'Euler permet d'approcher la solution φ d'une équation différentielle au voisinage d'un point connu, en utilisant, de proche en proche, l'approximation affine de la fonction au voisinage de chaque point :*

$$\text{en tout point } a, \qquad \varphi(a+h) \simeq \varphi(a) + h\varphi'(a), \quad \text{lorsque } h \text{ est petit (positif ou négatif)}$$

Soit $I =]1, +\infty[$, et on considère l'équation différentielle (E) :

$$\forall t \in I,\ -t^2 y'(t) + t y(t) = (y(t))^2$$

ayant pour inconnue une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.
On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions solutions de cette équation différentielle.

1. (a) Montrer que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{t}{\ln(t)}$ est une solution de l'équation (E) sur $]1, +\infty[$.
   (b) L'ensemble $\mathcal{S}$ est-il un espace vectoriel ?
   (c) Représenter en Python la fonction f sur l'intervalle $[2, 4]$.
2. On cherche une solution y de l'équation différentielle (E) vérifiant $y(e) = 3$.
   Sous réserve d'existence de y, utiliser la méthode d'Euler pour représenter en Python un tracé approximatif de la courbe représentative de y sur l'intervalle $[2, 4]$ en partant du point $(e; 3)$.
   On pourra tracer successivement une solution sur $[e, 4]$ *puis une solution sur* $[2, e]$.
   Comparer avec le graphe obtenu à la question 1.

3. Déterminer les solutions sur I de l'équation différentielle linéaire (E') :
   $$t^2 z'(t) + t z(t) = 1$$
   ayant pour inconnue une fonction $z : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.
4. Soit y une solution de (E), qui ne s'annule pas sur tout l'intervalle I.
   Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{y(t)}$ est solution de (E').
   En déduire l'expression de y.
5. (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des fonctions de $\mathcal{S}$ qui ne s'annulent pas sur I.
   (b) A-t-on $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$?
   (c) Existe-t-il une solution de (E) vérifiant $y(e) = 3$ et ne s'annulant pas sur I ?

1. Question de cours.

Énoncer la formule des probabilités totales.

---

2. Exercice.

On s'intéresse à une population de saumons et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n le nombre de saumons de l'année n. Selon un modèle d'évolution de la population, on a l'égalité pour tout $n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = y_n \mathrm{e}^{r(1-\frac{y_n}{p})}$ où p représente la capacité limite du milieu et r est le taux de croissance intrinsèque de la population ($r > 0$).

1. Montrer qu'en posant $b = \dfrac{r}{p}$, $\alpha = \mathrm{e}^r$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n = by_n$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie alors la relation, pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \alpha x_n \mathrm{e}^{-x_n}$. Quel est le comportement de (x_n) si $x_0 = 0$?
   Par la suite, on suppose que $x_0 > 0$.
2. Montrer rapidement que (x_n) prend des valeurs strictement positives.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction $f_\alpha : x \mapsto \alpha x \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. Déterminer les solutions de l'équation $f_\alpha(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+$ selon la valeur de α.
5. (a) Écrire une fonction en Python qui prend en arguments un réel x_0 et un réel α et qui représente les termes x_k pour k variant entre 0 et 200. On fera apparaître les points (k, x_k) pour k pair en bleu et ceux pour k impair en rouge.
   On rajoutera donc l'option `color='blue'` ou `color='red'` pour choisir la couleur du graphe.
   (b) Tester votre programme dans le cas où $u_0 = 0.5$. Quel semble être le comportement de la suite pour $\alpha = 4$? Observer le comportement chaotique lorsque $\alpha = 15$.
6. On suppose que $\alpha \in]\mathrm{e}, \mathrm{e}^2[$.
   (a) On introduit la fonction g_α où $g_\alpha : x \mapsto f_\alpha(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.
   Étudier le signe de g_α sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer qu'il existe un réel $M \in [0, 1[$ tel que pour tout réel $x \in [1, +\infty[$, $\left|f'_\alpha(x)\right| \leqslant M$.
   (c) Montrer que l'équation $f_\alpha(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}_+$. On notera λ_α la solution dans $[0, 1[$ et μ_α celle dans $]1, +\infty[$.
   (d) On souhaite montrer qu'il existe un rang n_0 tel que $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$.
   On procède par l'absurde en supposant que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [0, \lambda_\alpha[\cup]\mu_\alpha, +\infty[$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $x_{n+1} \in [0, \lambda_\alpha]$, puis que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et convergente. En déduire une contradiction et conclure.
   (e) On admet que $f_\alpha(\alpha \mathrm{e}^{-1}) > 1$. Montrer que pour tout $x \in [1, \mu_\alpha], f_\alpha(x) \in [1, \mu_\alpha]$.
   (f) Soit un entier n_0 tel que $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$.
   Montrer que $x_{n_0+1} \in [1, \mu_\alpha]$, puis que pour $n \geqslant n_0 + 1$, $|x_{n+1} - \ln(\alpha)| \leqslant M|x_n - \ln(\alpha)|$.
   (g) En déduire que (x_n) converge et préciser sa limite.

Exemple 10

1. Question de cours.

Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire $f : E \to F$.

---

2. Exercice.

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.
Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires à densité, indépendantes et de même fonction de répartition F, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on ordonne les valeurs $X_1(\omega), ..., X_n(\omega)$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_k(\omega)$ la k-ème plus petite valeur. On a donc $Y_1(\omega) \leqslant Y_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_n(\omega)$.
En particulier, on a $Y_1 = \min(X_1, \dots, X_n)$, $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que les variables $X_1, \dots, X_n$ suivent la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) Calculer $P(Y_1 > x)$ pour tout réel x positif et en déduire la fonction de répartition de Y_1. Reconnaître une loi usuelle dont on donnera l'espérance et la variance.
   (b) Montrer que si U est une variable qui suit la loi uniforme sur $]0, 1]$ alors $\dfrac{-1}{\lambda} \ln(U)$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   (c) Écrire un programme qui, pour un $n \in \mathbb{N}$ et un $i \in [\![1, n]\!]$ donnés, permet de simuler la variable aléatoire Y_i lorsque les variables $X_1, \dots, X_n$ suivent indépendamment la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pourra pour cela utiliser l'instruction `B=sorted(A)` qui fournit un tableau `B` contenant les valeurs du tableau `A` rangées dans l'ordre croissant.

   On retourne maintenant au cas général.
2. Exprimer la fonction de répartition de Y_n à l'aide de F.
3. Les variables Y_1 et Y_n sont-elles indépendantes ?
4. On souhaite maintenant obtenir la fonction de répartition de Y_i, pour n'importe quel i dans $[\![1; n]\!]$. On fixe donc i dans $[\![1; n]\!]$ et x dans $\mathbb{R}$ et on cherche à calculer $P(Y_i \leqslant x)$. C'est la probabilité qu'au moins i variables parmi $X_1, ..., X_n$ soient inférieures ou égales à x.
   (a) Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on note Z_k la variable telle que $Z_k(\omega) = 1$ si $X_k(\omega) \leqslant x$ et $Z_k(\omega) = 0$ sinon. Reconnaître la loi de Z_k (on exprimera le(s) paramètre(s) à l'aide de $F(x)$).
   (b) On note $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$. Que représente S ? Reconnaître sa loi.
   (c) Montrer que $P(Y_i \leqslant x) = P(S \geqslant i)$ et en déduire l'expression de $P(Y_i \leqslant x)$ sous la forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à simplifier.

Exemple 11

1. Question de cours.

Énoncer le théorème de Pythagore dans $\mathbb{R}^n$.

---

2. Exercice.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x > 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$.
   Montrer que la variable aléatoire $V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$ suit la même loi que X.
4. Écrire un programme Python simulant une réalisation de la variable aléatoire X.
5. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une variance ?
   Si oui, les calculer, et vérifier vos réponses à l'aide du programme de la question 4.
6. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.
   On définit, pour tout entier n non nul, la variable aléatoire T_n par :

   $$T_n = \frac{\max(X_1, \ldots, X_n)}{\sqrt{n}}.$$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la fonction de répartition de T_n.

   (b) Calculer alors pour tout réel x :

   $$G(x) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(T_n \leqslant x)$$

   (c) On **admet** que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T à densité.
   Montrer que T admet pour densité la fonction x donnée par :

   $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (d) À l'aide du changement de variable $x = \dfrac{1}{u}$, montrer que T admet une espérance et la déterminer.

Exemple 12

1. Question de cours.

Définition de la dérivée d'une fonction f en un point a.

---

2. Exercice.

On rappelle que si V et W sont deux variables indépendantes de densité f_V et f_W, alors $V+W$ est une variable à densité, dont une densité h est définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t) f_W(x-t)dt$.

Trois clients, notés A, B et C arrivent simultanément aux deux caisses inoccupées d'un magasin.
A et B occupent immédiatement (à l'instant $t=0$) les deux caisses, C attend la première caisse laissée libre par A ou B. On néglige le temps de changement de personne.
On suppose que les durées de passage à une caisse par A, B ou C sont des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$ et notées respectivement X, Y et Z.

1. À l'aide de simulations informatiques en Python, estimer la probabilité que C soit le dernier à quitter les caisses parmi ces trois personnes.
2. On désigne par la variable aléatoire U le temps attendu par C avant d'être pris en charge à la caisse.
   Montrer que U admet une densité, puis en donner une.
3. Déterminer l'espérance et la variance de U.
4. On note T le temps total passé aux caisses par C en comptant son temps d'attente et sa durée de passage à la caisse.
   (a) Exprimer simplement la variable T en fonction des variables précédentes.
   (b) Déterminer la loi de T.
   (c) Déterminer l'espérance de T.
5. On admet que la variable $D = |X - Y|$ a la même densité que la variable U. Déterminer alors la probabilité que C soit le dernier à quitter les caisses parmi ces trois personnes.